国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
一九八七年第四期　总第六十期　No.4 1987 Sum. 60

空间pNA′与对策的NA一致连续性

黄振高

（系统工程与应用数学系）

摘　要　pNA是无原子对策理论中极其重要的Banach空间，Kohlberg和Tauman已经刻划了pNA中某类对策的特征。本文从另一角度来研究这一困难的问题，目的是刻划比pNA更大，但又与PNA极为相似的Banach空间pNA′中的对策之特征。我们证得pNA′中的对策可用NA一致连续性来刻划。

关键词　对策论；pNA′空间；NA一致连续

PNA是无原子对策理论中极其重要的Banach空间。如何刻划PNA中的对策？这是一个颇为困难的问题。1973年，Kohlberg[3]发现了形如$f(\mu)$（其中μ是无原子测度）的对策属于PNA的充要条件。最近，Tauman[4]进一步刻划了pNA中的向量测度对策，即可表示为某个无原子向量测度之函数的对策。这是迄今为止最令人满意的结果。本文从另一角度考虑上面的问题，目的是刻划比pNA更大但又与pNA极为相似的Banach空间，即pNA′中的对策。下面首先引入本文必须的定义，这些定义都可在Aumann和Shapley的标准著作[2]中找到。

设$(I,\mathscr{C})$是同构于$([0,1],\mathscr{B})$的可测空间(其中$\mathscr{B}$是$[0,1]$中的Borel集合之全体)。一个对策是指定义在$\mathscr{C}$上的实函数v，满足$v(\phi)=0$。用BV′表示有界对策之全体赋以范数$\|v\|'=\sup\limits_{S\in\mathscr{C}}|v(S)|$后得到的Banach空间，NA表示$(I,\mathscr{C})$上无原子测度的全体，那么pNA′定义为由NA中的测度及其诸次幂生成的闭线性子空间。

对策v称为NA一致连续的，如果对任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$及无原子向量测度$\mu=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$使

$$\|\mu(S)-\mu(T)\|<\delta\Rightarrow|v(S)-v(T)|<\varepsilon, \tag{1}$$

其中$\|\cdot\|$定义为$\|x\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$，$\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$。

定理　设v是对策，则$v\in$pNA′当且仅当v是NA一致连续的。

为证此定理，我们需要如下的引理。

引理　如果f是R^n上的连续函数，满足$f(0)=0$，μ是n维无原子测度，则$f(\mu)\in$PNA′.

本文1986年4月15日收到

证明 由文献[2]的引理7.2，当 f 是多项式时，结论是对的。在一般情况下，先由 Liapunaff 凸性定理（即[2]的命题1.3）知道 μ 的值域 $R(\mu)$ 是 R^n 中的紧集，再根据 Stone-Weierstrass定理，存在一列 n 元多项式 p_n 使 $p_n(0)=0$, $\max\limits_{x\in R(\mu)}|f(x)-p_n(x)|\to 0$，于是 $\max\limits_{S\in\mathscr{C}}|f(\mu(S))-P_n(\mu(S))|\to 0$。由于 $P_n(\mu)\in$ pNA′ 对每一 n 都成立，故 $f(\mu)\in\overline{\text{pNA}'}=\text{pNA}'$.

定理的证明 必要性已为Aumann和Shapley所证，见[2]之148页。下面证明充分性。任取 $\varepsilon>0$，由充分性条件，存在 $\delta>0$，以及无原子向量测度 $\mu=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$ 使(1)成立。根据Liapunoff定理，μ 的值域 $R(\mu)$ 是 R^n 中的紧集，所以存在有限个 $S_1,S_2,\cdots,S_m\in\mathscr{C}$ 使

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}\|\mu(S_i)-\mu(T)\|<\delta/2 \tag{2}$$

命

$$G_0=\{x\in R^n:\|x\|<\delta/2\}$$
$$G_i=\{x\in R^n:\|x\|>\delta/4\text{且}\|x-\mu(S_i)\|<\delta\},\ i=1,2,\cdots,m$$
$$G_{m+1}=\{x\in R^n:\|x\|>\delta/4\text{且}\|x-\mu(S_i)\|>\delta/2,\ i=1,2,\cdots m\}$$

显然，$\{G_i\}_{i=0}^{m+1}$ 是 R^n 的开复盖，根据单位分解定理（见[1]，198页），存在 R^n 上的连续函数 $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{m+1}$ 使

$$0\leqslant\alpha_i(x)\leqslant 1 \tag{3}$$

$$x\overline{\in}G_i\Rightarrow\alpha_i(x)=0 \tag{4}$$

$$\sum_{i=0}^{m+1}\alpha_i(x)=1 \tag{5}$$

作对策 v_ε 如下

$$v_\varepsilon(S)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(\mu(S))v(S_i)$$

因为 $0\overline{\in}G_i$, $i=1,2,\cdots,m$，故 $\alpha_i(0)=0$。于是由引理知道 $v_\varepsilon\in$ PNA′。另一方面，我们有

$$\begin{aligned}&|v(S)-v_\varepsilon(S)|\\&=\left|\sum_{i=0}^{m+1}\alpha_i(\mu(S))v(S)-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(\mu(S))v(S_i)\right|\\&\leqslant\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(\mu(S))\,|v(S)-v(S_i)|+\alpha_0(\mu(S))\,|v(S)|\\&\quad+\alpha_{m+1}(\mu(S))\,|v(S)|.\end{aligned}$$

由(2)，$\mu(S)\overline{\in}G_{m+1}$，于是上式最后一项为0。再由(4)，中间项不超过 $\mu(S)\in G_0$ 时的 $|v(S)|$，而当 $\mu(S)\in G_0$ 时，(1)说明

$$|v(S)|=|v(S)-v(\phi)|<\varepsilon.$$

最后由(1)，(4)，(5)，第一项为

$$\sum_{\substack{\mu(S)\in G_i\\1\leqslant i\leqslant m}}\alpha_i(\mu(S))\,|v(S)-v(S_i)|\leqslant\sum_{\substack{\mu(S)\in G_i\\1\leqslant i\leqslant m}}\alpha(\mu(S))\varepsilon\leqslant\varepsilon$$

综合上述即得 $\|v-v_\varepsilon\|'\leqslant 2\varepsilon$.

至此我们证明了对于每一$\varepsilon>0$,存在$v_\varepsilon \in$ pNA′使$\|v-v_\varepsilon\|'<2\varepsilon$。这表明$v\in\overline{\text{pNA}'}=$ pNA′.

参 考 文 献

1. J-P. Aubin: Applied Abstract Analysis, Wiley-Interscience, 1977.
2. R.J.Aumann and L.S.: Shapley, Values of Nonatomic Games, Princeton University Press, 1974.
3. E.Kohlberg, On Nonatomic Games: Conditions for $f\cdot\mu\in$ pNA, Inter.J. Game Theory, 2, 1973, 87-98.
4. Y.Tauman: A Characterization of Vector Measure Games in pNA, Israel J.Math., 43, 1982, 75—96.

Banach Space pNA′ and NA-uniform Continuity of Nonatomic Games

Huang Zhengao

Abstract

Kohlberg and Tauman have characterized some class of games in pNA, a Banach space of great importance in Nonatomic Game Theory. Attacking the problem in another direction, this paper gives a characterization of games in pNA′, a Banach space larger than but similar to the space pNA.

Key words: Nonatomie games