国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第10卷第1期 1988年3月 Vol.10 No.1

用时序展开法求解瞬时无耗传输线方程

黄广连 张 钧

（电子技术系）

摘 要 本文用时序展开法直接在时域中求解了任意终端和输入端时无耗时变传输线方程。给出了这个问题的一般解。此方法简单，结果的物理意义明确，对分析准行波系统的时域问题具有一定的参考价值。

关键词 瞬变传输方程的解，时序展开法

1. 引 言

对于任意边界条件的传输线方程，其解法大都是频域的方法。就是对于某些时域问题，一般的方法也是通过Laplace变换[1]把问题变到复频域中求解，然后通过反演运算得到时域结果。这种过程往往很复杂，结果也不直接，有时反演甚至求不出来。

本文在时域中直接使用时序展开[2]这个新方法来求任意边界条件的瞬变传输线方程的解。

2. 时序展开法的意义和算子阻抗（导纳）的引入

时序展开法是把问题的解看成一系列产生于不同时刻的脉冲的迭加，然后根据边界条件求出这些脉冲的具体形式。

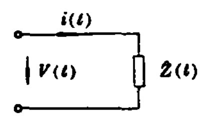

图 1 算子阻抗定义图

为了使用这个方法，我们引入算子阻抗和导纳的概念。对于图1所示的电路，我们定义$\hat{z}(t)$为算子阻抗，其定义式是：

$$v(t)=\hat{z}(t)i(t) \tag{1}$$

同样对于算子导纳$\hat{Y}(t)$有：

$$i(t)=\hat{Y}(t)v(t) \tag{2}$$

（1）、（2）两式具有数值运算意义。

对于纯电阻元件，$\hat{z}(t)=R$；对于纯电容元件，由

$$v(t)=\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{c(t')}i(t')dt'$$

1987年5月5日收到

得
$$\hat{z}(t)=\int_{-\infty}^{t}\left\{\frac{1}{c(t')}\cdots\right\}dt'$$
对于纯电感元件
$$\hat{z}(t)=-\frac{d\{L(t)\cdots\}}{dt}$$

算子阻抗（导纳）具有下面的性质：

1) $\hat{z}_1(t)+\hat{z}_2(t)=\hat{z}_2(t)+\hat{z}_1(t)$ (3)

2) $\hat{z}_0(t)[\hat{z}_1(t)+\hat{z}_2(t)+\cdots+\hat{z}_N(t)]=\hat{z}_0(t)\hat{z}_1(t)+\hat{z}_0(t)\hat{z}_2(t)+\cdots+\hat{z}_0(t)\hat{z}_N(t)$ (4)

3) 一般情况下，$\hat{z}_1(t)\hat{z}_2(t)\neq\hat{z}_2(t)\hat{z}_1(t)$ (5)

需要说明的是，$\hat{z}_1(t)\hat{z}_2(t)$ 不是相乘或者卷积的意思，它只表示 两个算子“并”在一起，然后去作用于某个物理量。

3. 任意初端和终端无耗传输线方程的解

无耗传输线的方程为：
$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=\frac{1}{\sqrt{LC}}\ \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \tag{6}$$
$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2}=\frac{1}{\sqrt{LC}}\ \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \tag{7}$$
其中 z 为传输方向的坐标参量，L、C 分别为传输线单位长度的电感和电容。$V(t)$、$I(t)$ 分别代表传输线上的电压和电流，t 代表时间变量。

记 $z_0=\sqrt{\frac{L}{C}}$ 为传输线的特性阻抗。

根据(6)，(7)两式可知，它的解具有下面的形式：
$$V(z,t)=f\left(t-\frac{z}{c}\right)+g\left(t+\frac{z}{c}\right) \tag{8}$$
$$I(z,t)=\frac{1}{z_0}\left[f\left(t-\frac{z}{c}\right)-g\left(t+\frac{z}{c}\right)\right] \tag{9}$$
利用时序展开法的思想和(8)，(9)两式，我们可以把方程(6)，(7)的全解写成一系列(8)、(9)形式的迭加：
$$v(z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{F_{2n}\left(t-\frac{z}{c}-2n\frac{l}{c}\right)+g_{2n-1}\left(t+\frac{z}{c}-2n\frac{l}{c}\right)\right\} \tag{10}$$
$$i(z,t)=\frac{1}{z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{F_{2n}\left(t-\frac{z}{c}-2n\frac{l}{c}\right)-g_{2n-1}\left(t+\frac{z}{c}-2n\frac{l}{c}\right)\right\} \tag{11}$$
其中 c 代表光速，l 代表传输线的长度，如图2所示。

在(10)，(11)中，F 代表产生于不同时刻的入射波，g 代表产生于不同时刻的反射波。对于 $T<0$，$F_{2n}(T)$ 和 $g_{2n-1}(T)$ 都为0；而且对于任何 T 都有 $g_{-1}(T)=0$。

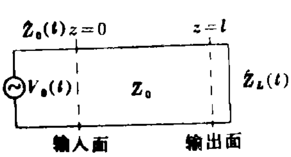

图 2 传输线有载示意图

(10)，(11)只是形式解，要得到具体解还需要边界条件。图2绘出了一般边界情况下的示意图，据此可以写出下面的边界条件：

$$z=0\ 处\quad v(t)=V_0(t)-\hat{z}_0(t)i(t) \tag{12}$$

$$z=l\ 处\quad v(t)=\hat{z}_L(t)i(t) \tag{13}$$

将(12)，(13)代入(10)、(11)整理后得到：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{[z_0-\hat{z}_L(t)]F_{2n}\left(t-\frac{l}{c}-2n\frac{l}{c}\right)+[z_0+\hat{z}_L(t)]g_{2n-1}\left(t+\frac{l}{c}-2n\frac{l}{c}\right)\right\}=0 \tag{14}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{[z_0+\hat{z}_0(t)]F_{2n}\left(t-2n\frac{l}{c}\right)+[z_0-\hat{z}_0(t)]g_{2n-1}\left(t-2n\frac{l}{c}\right)\right\}=z_0V_0(t) \tag{15}$$

(14)、(15)是一组特殊的递推方程组。对于某个时刻的F，g，只要知道了前导时间F，g的形式，就可以求出该时刻的F，g。

对于 $0\leqslant t<\frac{l}{c}$，可以求出：

$$F_0(t)=z_0\hat{Y}_0'(t)V_0(t) \tag{16}$$

$$\hat{Y}_0'(t)=[z_0+\hat{z}_0(t)]^{-1} \tag{17}$$

在(17)中，$\hat{Y}_0'(t)$表示$z_0+\hat{z}_0(t)$的对应算子导纳。

对于 $\frac{l}{c}\leqslant t<\frac{2l}{c}$，可以求得：

$$g_1\left(t-\frac{l}{c}\right)=\hat{\Gamma}_L(t)\hat{Y}_0'\left(t-\frac{l}{c}\right)z_0V_0\left(t-\frac{l}{c}\right) \tag{18}$$

$$\hat{\Gamma}_L(t)=[\hat{z}_L(t)+z_0]^{-1}[\hat{z}_L(t)-z_0] \tag{19}$$

在(19)式中，称$\hat{\Gamma}_L(t)$为负载的算子反射系数。

按照上述方式递推下去可以发现一般解：

$$F_{2n}(t)=z_0\hat{\Gamma}_s\left(t+\frac{2nl}{c}\right)\left\{\prod_{i=1}^{n-1}\hat{\Gamma}_i(t)\right\}\hat{\Gamma}_L(t)\hat{Y}_0'(t)V_0(t) \tag{20}$$

$$g_{2n-1}(t)=z_0\left\{\prod_{i=1}^{n-1}\hat{\Gamma}_i(t)\right\}\hat{\Gamma}_L\left(t+\frac{l}{c}\right)\hat{Y}_0'(t)V_0(t) \tag{21}$$

式中

$$\hat{\Gamma}_s(t)=[z_0(t)+z_0]^{-1}[\hat{z}_0(t)-z_0] \tag{22}$$

称$\hat{\Gamma}_s(t)$为输入端算子反射系数；

$$\hat{\Gamma}_i(t)=\hat{\Gamma}_L\left(t+\frac{2i+1}{c}l\right)\hat{\Gamma}_s\left(t+\frac{2i}{c}l\right) \tag{23}$$

称$\hat{\Gamma}_i(t)$为算子转换系数。

在式(19)和式(22)中，$[\hat{z}_L(t)+z_0]^{-1}$和$[\hat{z}_0(t)+z_0]^{-1}$分别代表$[\hat{z}_L(t)+z_0]$和$[\hat{z}_0(t)+z_0]$相应的算子导纳。

根据上述的关系，我们可以把问题的解写成

$$v(z,t)=z_0\hat{Y}_0'\left(t-\frac{z}{c}\right)V_0\left(t-\frac{z}{c}\right)+z_0\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\hat{\Gamma}_s\left(t-\frac{z}{c}\right)\right.$$

$$\cdot\left[\prod_{i=1}^{n-1}\hat{\Gamma}_i\left(t-\frac{z}{c}-\frac{2nl}{c}\right)\right]\left[\hat{\Gamma}_L\left(t-\frac{z}{c}-\frac{2n-1}{c}l\right)\right.$$

$$\left.\cdot\hat{Y}_0'\left(t-\frac{z}{c}-\frac{2nl}{c}\right)V_0\left(t-\frac{z}{c}-\frac{2nl}{c}\right)\right]+\left[\prod_{i=1}^{n-1}\hat{\Gamma}_i\left(t+\frac{z}{c}-\frac{2nl}{c}\right)\right]$$

$$\left.\cdot\left[\hat{\Gamma}_L\left(t+\frac{z}{c}-\frac{2n-1}{c}l\right)\hat{Y}_0'\left(t+\frac{z}{c}-\frac{2nl}{c}\right)V_0\left(t+\frac{z}{c}-\frac{2nl}{c}\right)\right]\right\} \tag{24}$$

$$i(z,t)=\hat{Y}_0'\left(t-\frac{z}{c}\right)V_0\left(t-\frac{z}{c}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\hat{\Gamma}_s\left(t-\frac{z}{c}\right)\right.$$

$$\cdot\left[\prod_{i=1}^{n-1}\hat{\Gamma}_i\left(t-\frac{z}{c}-\frac{2nl}{c}\right)\right]\left[\hat{\Gamma}_L\left(t-\frac{z}{c}-\frac{2n-1}{c}l\right)\right.$$

$$\left.\cdot\hat{Y}_0'\left(t-\frac{z}{c}-\frac{2nl}{c}\right)V_0\left(t-\frac{z}{c}-\frac{2nl}{c}\right)\right]-\left[\prod_{i=1}^{n-1}\hat{\Gamma}_i\left(t+\frac{z}{c}-\frac{2nl}{c}\right)\right]$$

$$\left.\cdot\left[\hat{\Gamma}_L\left(t+\frac{z}{c}-\frac{2nl}{c}\right)\hat{Y}_0'\left(t+\frac{z}{c}-\frac{2nl}{c}\right)V_0\left(t+\frac{z}{c}-\frac{2n-1}{c}l\right)\right]\right\} \tag{25}$$

这是考虑到了边界条件后得到的具体解，给出了具体的边界条件，可以得到解更为具体的形式。

为了说明上述结果的正确性，这里给出电阻边界的情况，以便与文献[1]作比较。

设 $\hat{Z}_0(t)=0$，$\hat{Z}_L(t)=R(t)$，$V_0(t)=U(t)$，$U(t)$ 为单位阶跃函数，在这种情况下有：

$$\hat{\Gamma}_s(t)=-1;\quad \hat{\Gamma}_L(t)=\frac{R(t)-\hat{Z}_0}{R(t)+\hat{Z}_0}\triangleq\Gamma_L(t)$$

$$\hat{\Gamma}_i(t)=\hat{\Gamma}_L\left(t+\frac{2i+1}{c}l\right)\hat{\Gamma}_s\left(t+\frac{2i}{c}l\right)$$

$$=(-1)\Gamma_L\left(t+\frac{2i+1}{c}l\right);\quad \hat{Y}_0'(t)=\frac{1}{\hat{Z}_0}$$

将式上述4式代入式（24），（25）得：

$$v(z,t)=U\left(t-\frac{z}{c}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(-1)^n\prod_{i=1}^{n-1}\Gamma_L\left(t-\frac{z}{c}-\frac{2nl}{c}+\frac{2il}{c}+\frac{l}{c}\right)\right.$$

$$\cdot\Gamma_L\left(t-\frac{z}{c}-\frac{2n-1}{c}l\right)U\left(t-\frac{z}{c}-\frac{2nl}{c}\right)+(-1)^{n-1}\prod_{i=1}^{n-1}\Gamma_L$$

$$\left.\cdot\left(t+\frac{z}{c}-\frac{2nl}{c}+\frac{2i+1}{c}l\right)\Gamma_L\left(t+\frac{z}{c}-\frac{2n-1}{c}l\right)U\left(t+\frac{z}{c}-\frac{2nl}{c}\right)\right\} \tag{26}$$

同样可以写出电流的表示式，此处从略。

对于式(26)，从表面上看它与文献[1]上的形式不一样，但实质是一样，我们把时间分成一个一个的间隔（象前面递推一样）就可以证明这一点。

象文献[1]一样，假定 $\Gamma_L(t)\leq 0$ 可以得图3所示的定性图。

可见图3与文献[1]上的图完全一样。

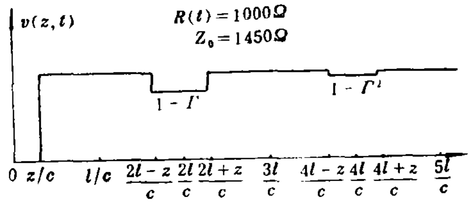

图 3　电压波形示意图

参 考 文 献

[1] 戴振铎教授讲座专题文献，上海师大，1979.11

[2] 沈浩明：求解脉冲电磁场的时序法，中国科学（A），1984. 第2期

Solving the Transient Equations of Transmission Lines with Lossless by the Method of Expansion of Time Order

Huang Guang lian　Zhang Jun

Abstract

In this paper, the solutions of the transient equations of transmission lines with lossless and artitrary loads of input and output are obtained by the method of expansion of time order. This method is simple and the results are obvious. To use this method, some new concepts such as operator admittances, reflect coefficients. etc. are introduced. These give the foundation of analysing other problems directly in time domain.

Key Words The solutions of transient transmission line quations, Exponsion of time order