国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第10卷第3期　1988年9月　Vol.10.No.3

奇型偏微分方程的柯西问题

孔　荣
（系统工程与应用数学系）

摘　要　定解条件给在奇线上的偏微分方程的各种定解问题早已有研究[1～4]，多数作者使用了特殊函数作工具。本文用能量不等式组来解决一类奇型双曲型方程的柯西问题。

本文主要讨论如下问题解的存在唯一性：

$$\begin{cases} Lu \equiv [(t^{\alpha/2}\partial_t - \lambda_1(x,t)\partial_x)(t^{\alpha/2}\partial_t - \lambda_2(x,t)\partial_x) + a(x,t)\partial_t \\ \qquad + b(x,t)\partial_x + c(x,t)]u(x,t) = f(x,t) \\ \qquad\qquad (x,t) \in R\times(0,T] \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ \lim\limits_{t\to 0} t^{\alpha/2}u_t = \Psi(x) \end{cases} \tag{I}$$

这是一个二阶偏微分方程，当$\alpha>0$时，∂_t^2的系数当$t=0$时变为零，因而这是一个初始值给在奇线上的柯西问题。我们假定：

(A)　α为常数，$0<\alpha<1$；所涉及的都是实函数；

(B)　$a(x,t), b(x,t), c(x,t), \lambda_j(x,t)(j=1,2)\in C^1([0,T], C^2(R))$，且上述函数的所有可能的导数都有界；

(C)　$\varphi(x), \psi(x)\in C_0^4(R)$；

(D)　$f(x,t)\in C((0,T], C_0^2(R))$，且　(II)

$$\sup_{x,t}\{t^{\alpha/2}(|f| + |f_x| + |f_{xx}|)\} < +\infty$$

(E)　存在常数$\delta>0$，使当$(x,t)\in R\times[0,T]$时，有：

$$|\lambda_1(x,t) - \lambda_2(x,t)| \geqslant \delta$$

条件(II)中关于实函数的假设不是必要的，作此假设仅为方便。

本文主要得到：

定理1：在(II)的假设下，(I)存在唯一弱解u，并

$$u\in C([0,T), H^1(R))\cap C^1((0,T), L_2(R)).$$

为证明该定理作了一系列准备，关键是证得引理1，引理2和引理6。

关键词：偏微分方程，奇型，柯西问题解。

1.　用函数代换将(I)化为齐次初值问题

事实上，令

1987年9月1日收到

$$u=v+U$$

其中
$$U=\varphi(x)+\frac{t^{1-\frac{\alpha}{2}}}{1-\frac{\alpha}{2}}\psi(x)$$

则(1)化为关于v的齐次初值问题，为方便，仍记未知函数为u，于是

$$\begin{aligned}Lu\equiv&[(t^{\alpha/2}\partial_t-\lambda_1(x,t)\partial_x)(t^{\alpha/2}\partial_t-\lambda_2(x,t)\partial_x)\\&+a(x,t)\partial_t+b(x,t)\partial_x+c(x,t)]u(x,t)=f(x,t)\\&(x,t)\in R\times(0,T]\\u|_{t=0}=0,&\ \lim_{t\to0}t^{\alpha/2}u_t=0.\end{aligned}\qquad(\mathrm{III})$$

(Ⅲ)中，右端项与(Ⅰ)的右端项有所不同，因仍满足条件(Ⅱ)，故仍记为$f(x,t)$。下面我们将采用简写的办法，例如写$\lambda_1(x,t)\equiv\lambda_1, a(x,t)\equiv a$，等等，余皆类推。

将算子L进行一些变型，令：

$$\xi=\frac{at^{-\frac{\alpha}{2}}\lambda_1+b}{\lambda_1-\lambda_2},\quad \eta=\frac{at^{-\frac{\alpha}{2}}\lambda_2+b}{\lambda_1-\lambda_2}$$

则
$$L=(t^{\alpha/2}\partial_t-\lambda_1\partial_x+\xi)(t^{\alpha/2}\partial_t-\lambda_2\partial_x-\eta)+\zeta(x,t)$$

其中：
$$\zeta(x,t)=\xi\eta+t^{\alpha/2}\eta_t-\lambda_1\eta_x+C$$

注意一个事实：

$$\sup_{x,t}\{t(|\zeta|+|\zeta_x|)\}<+\infty$$

令　$(t^{\alpha/2}\partial_t-\lambda_2\partial_x-\eta)u=v$，则我们得到下列问题：

$$\begin{cases}(t^{\alpha/2}\partial_t-\lambda_2\partial_x-\eta)u=v\\(t^{\alpha/2}\partial_t-\lambda_1\partial_x+\xi)v=f-\zeta u\qquad(x,t)\in R\times(0,T]\\u|_{t=0}=0,\quad v|_{t=0}=0\end{cases}\qquad(\mathrm{IV})$$

为了得到条件$v|_{t=0}=0$，只要注意$\lim\limits_{t\to0}\eta u=0$。因为当$t\to0$时，$\eta=O(t^{-\alpha/2})$。

显然，若我们得到(Ⅳ)的解，则可得(Ⅲ)的广义解，事实上，两者在广义意义下是等价的。

2. 用迭代法求解(Ⅳ)

迭代格式如下：

$$\begin{cases}(t^{\alpha/2}\partial_t-\lambda_2\partial_x-\eta)u^{(0)}=v^{(0)}\\(t^{\alpha/2}\partial_t-\lambda_1\partial_x+\xi)v^{(0)}=f\qquad(x,t)\in R\times(0,T]\\u^{(0)}|_{t=0}=0,\quad v^{(0)}|_{t=0}=0\end{cases}\qquad(\mathrm{V})_0$$

$$\begin{cases}(t^{\alpha/2}\partial_t-\lambda_2\partial_x-\eta)u^{(m)}=v^{(m)}\\(t^{\alpha/2}\partial_t-\lambda_1\partial_x+\xi)v^{(m)}=-\zeta u^{(m-1)}\qquad(m\geqslant1)\\u^{(m)}|_{t=0}=0,\quad v^{(m)}|_{t=0}=0\end{cases}\qquad(\mathrm{V})_m$$

引理1　考察问题：

$$\begin{cases}(t^{\alpha/2}\partial_t-\lambda\partial_x+\xi)u=f & (x,t)\in R\times(0,T]\\ u\mid_{t=0}=0\end{cases} \quad (\text{VI})$$

其中λ满足(II)中对λ_1的条件，

$$f\in C([0,T],C_0^2(R)),\xi\in C((0,T],C^2(R))$$

$$\sup_{x,t}\{t^{\alpha/2}(\ |\xi|\ +\ |\xi_x|\ +\ |\xi_{xx}|\ )\}<+\infty.$$

则：

(1) (VI)有唯一有界解$u\in C^1(R\times(0,T])\cap C(R\times[0,T])$；

(2) 当$t\to 0$时，$u=O(t^{1-\alpha/2}),u_x=O(t^{1-\alpha/2}),u_{xx}=O(t^{1-\alpha/2})$；

(3) $\underset{x}{\operatorname{supp}}u(x,t)$关于$t\in[0,T]$一致紧致；

(4) $u_{xx}\in C(R\times[0,T])$.

证明 令 $s=\dfrac{t^{1-\frac{\alpha}{2}}}{1-\dfrac{\alpha}{2}}$，则(VI)变为：

$$\begin{cases}(\partial_s-\tilde{\lambda}(x,s)\partial_x+\tilde{\xi}(x,s))u=\tilde{f}(x,s),\ (x,\ s)\in R\times\left(0,\dfrac{T^{1-\frac{\alpha}{2}}}{1-\dfrac{\alpha}{2}}\right]\\ u\mid_{s=0}=0\end{cases}$$

其中， $\tilde{\lambda}(x,s)=\lambda(x,[(1-\alpha/2)s]^{\frac{2}{2-\alpha}})$，余皆类推。

易见，$\tilde{\lambda},\tilde{f}$仍具有$\lambda$和$f$的性质，而$\tilde{\xi}$的在$s\to 0$时的奇性为：

$$\tilde{\xi}=O(s^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}})$$

我们用特征线法来求解这个问题。

方程过点(x,s)的特征线由：

$$\begin{cases}\dfrac{d\theta}{d\tau}=\tilde{\lambda}(\theta,\tau),\ (\theta,\ \tau)\in R\times\left(0,\dfrac{T^{1-\frac{\alpha}{2}}}{1-\dfrac{\alpha}{2}}\right],\\ \theta\mid_{\tau=s}=x\end{cases}$$

确定，其中，$0\leqslant s<\dfrac{T^{1-\frac{\alpha}{2}}}{1-\dfrac{\alpha}{2}}$.

由$\lambda_x(x,t)$的连续有界性，我们知道特征线$\theta=\theta(\tau,x,s)$整体存在唯一，且关于τ,x,s连续可微。

在特征线上，u满足

$$u=\int_0^s[-\tilde{\xi}(\theta(\tau,x,s),\tau)u+\tilde{f}(\theta(\tau,x,s),\tau)]d\tau \quad (\text{VII})$$

我们来证明(VII)的有界解唯一。设：

$$|\tilde{\xi}|\leqslant\frac{N}{s^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}},$$

则只要证明：$V=\int_0^s(-\xi V)d\tau$ 只有零解即可，而

$$|V|\leqslant\int_0^s\frac{N}{\tau^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}}|V|d\tau\leqslant\frac{N}{1-\frac{\alpha}{2-\alpha}}s^{1-\frac{\alpha}{2-\alpha}}\sup_{x,t}|V|.$$

重复该过程，可得：

$$|V|\leqslant\frac{N^m}{\left(1-\frac{\alpha}{2-\alpha}\right)^m m!}s^{m\left(1-\frac{\alpha}{2-\alpha}\right)}\sup_{x,t}|V|$$

于是 $|V|=0$，由(Ⅶ)的解的唯一性知(Ⅵ)的解唯一。

为证存在性，作如下迭代格式：

$$\begin{cases}u_m=\int_0^s(-\xi u_{m-1}+f)d\tau,\quad m=1,2,3\cdots,\\ u_0=0\end{cases}$$

只要用类似Picard方法即可知函数列$\{u_m\}$关于$(x,s)\in R\times\left[0,\frac{T^{1-\frac{\alpha}{2}}}{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$绝对一致收敛。设此极限函数为$u$，则

$$u=\int_0^s(-\xi u+f)d\tau.$$

要说明这个u就是(Ⅵ)的解，我们还须证明u_x和u_t的连续性。

在(Ⅶ)两边关于x求导数得

$$u_x=\int_0^s(-\xi e^{\int_s^\tau\tilde{\lambda}_\theta(\theta,\tau)d\tau}u_\theta-\xi_x u+f_x)d\tau$$

上式u_x和积分号内的u_θ具有同样的意义，都是关于第一个位置变量求导数。

由前面求u的过程可知：

当$t\to0$时，$u=O(t^{1-\frac{\alpha}{2}})$. 另外：

$$\xi=\xi_\theta e^{\int_s^\tau\tilde{\lambda}_\theta d\tau},\quad f_x=f_\theta e^{\int_t^\tau\lambda_\theta d\tau}$$

从而可知，$-\xi_x u+f_x$（u已求得）是三个变量(τ,x,s)的连续函数，这样，我们可以用求u时所使用的方法确定唯一的函数U，

$$U=\int_0^s(-\xi e^{\int_s^\tau\tilde{\lambda}_\theta d\tau}U-\xi_x u+f_x)d\tau$$

于是证明了u_x关于(x,s)的连续性。这个步骤同时告诉我们：

当$t\to0$时，　$u_x=O(t^{1-\frac{\alpha}{2}})$

我们同样可证得u_{xx}连续，及：

当$t\to0$时，　$u_{xx}=O(t^{1-\frac{\alpha}{2}})$

u_s关于(x,s)的连续性是明显的，只要在(Ⅶ)两边关于s求导即得。

下面我们来证明第三个结论，由$\tilde{\lambda}$和$\tilde{\lambda}_x$有界，$\tilde{f}$ 在$R\times\left[0,\dfrac{T^{1-\frac{\alpha}{2}}}{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$中的支集紧致，从而存在正数$M>0, M_1>0$，得到如下两条直线：

$$\begin{cases} l_1:\ x=-Ms-M_1 \\ l_2:\ x=Ms+M_1 \end{cases}$$

将区域$R\times\left[0,\dfrac{T^{1-\frac{\alpha}{2}}}{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$分成如图三部分：

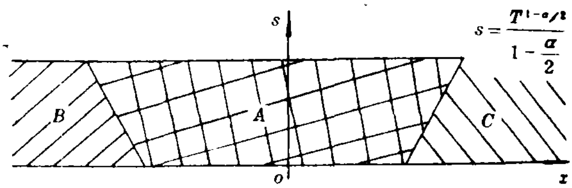

图 1

可取M_1充分大，使得$\tilde{f}$的支集包含在区域A中。可取$M>0$且很小，使得由B 或C中任意一点向x轴作特征线时，此特征线都不会与区域A有相重部分。于是由一阶偏微分方程的特征理论知，u在B中的值由u在B中的初值及$\tilde{f}$在B中的值唯一确定。由于u在B中的初值及$\tilde{f}$在B中的值为空，因而在B中有$u=0$，同理可证在A, C中$u=0$。

引理 2 假设λ和ξ满足引理1的条件，f满足下列条件：

$$f(x,t)\in C((0,T],C_0^2(R)),\ \text{并且}f\text{关于}x\text{的支集对于}t\in(0,T]\text{一致紧致。}$$

$$\sup_{x,t}\{t^{\alpha/2}(|f|+|f_x|+|f_{xx}|)\}<+\infty$$

则关于问题：

$$\begin{cases}(t^{\alpha/2}\partial_t-\lambda\partial_x+\xi)u=f,\quad (x,t)\in R\times(0,T] \\ u|_{t=0}=0\end{cases}$$

有如下结论：

(1) 存在唯一有界解$u(x,t)\in C(R\times[0,T])\cap C^1(R\times(0,T])$；

(2) 当$t\to 0$时，$u=O(t^{1-\alpha}), u_x=O(t^{1-\alpha}), u_{xx}=O(t^{1-\alpha})$；

(3) $u(x,t)$关于x的支集对于一切$t\in[0,T]$一致紧致；

(4) $u_{xx}\in C(R\times(0,T])$

证明 方法同引理1，只要注意f当$t\to 0$时的性质有所变化即可。

3. (V)m(m⩾0)解的性质

引理 3 在(II)的假设下，存在两个函数列：

$$\{u^{(m)}\},\ \{v^{(m)}\}\qquad m=0,1,2,\cdots$$

满足(V)中所对应的方程和定解条件，且

(1)　$u^{(m)}(m=0,1,2,\cdots)$具有引理1u的性质；

(2)　$v^{(m)}(m=0,1,2,\cdots)$具有引理2u的性质。

证明　以下用递推法证明。

首先考虑$m=0$时，由于$f(x,t)$满足引理2中对f的要求，因而$v^{(0)}$存在唯一且具有引理2中u的性质。由此可知，$v^{(0)}$满足引理1中对$f(x,t)$的要求，从而有唯一有界解$u^{(0)}$存在并满足引理1中对u的要求。

再考虑$m=1$，由于$u^{(0)}$的性质，可知$-\xi(x,t)u^{(0)}$满足引理2中对$f(x,t)$的要求，因此存在唯一解$v^{(1)}$，并且有引理2中u所具有的性质。另一方面$v^{(1)}$具有引理1中$f(x,t)$所具有的性质，这样，我们又可以求得唯一的$u^{(1)}$，且$u^{(1)}$具有引理1中u的性质。重复以上过程可证得引理。

引理 4　设

$$X_m(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}(u^{(m)})^2dx,\qquad Y_m(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}(v^{(m)})^2dx$$

其中$m=0,1,2,\cdots$，则存在常数$C>0$，使

$$X_0'(t)\leqslant\frac{C}{t^a}X_0(t)+Y_0(t);$$

$$Y_0'(t)\leqslant\frac{C}{t^a}Y_0(t)+F(t);$$

$$X_m'(t)\leqslant\frac{C}{t^a}X_m(t)+Y_m(t);$$

$$Y_m'(t)\leqslant\left(\frac{C}{t^a}+\frac{\varepsilon}{t}\right)Y_m(t)+C^1\frac{X_{m-1}(t)}{t^{1+a}}\qquad(m\geqslant1)$$

其中常数$C^1,\varepsilon>0$，且$\varepsilon+a<1$，

$$F(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(a,t)dx$$

证明　只证最后一个不等式。

$$\begin{aligned}Y_m'(t)&=2\int_{-\infty}^{+\infty}v^{(m)}v_t^{(m)}dx\\&=2t^{-a/2}\int_{-\infty}^{+\infty}v^{(m)}(\lambda_1\partial_xv^{(m)}-\xi v^{(m)}-\zeta u^{(m-1)})dx\\&=-t^{-a/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda_{1x}(v^{(m)})^2dx\\&\quad-2t^{-a/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\xi(v^{(m)})^2dx-2t^{-a/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\zeta v^{(m)}u^{(m-1)}dx\end{aligned}$$

上面第一和第二项的估计是平凡的，为估计第三项。注意当$t\to0$时，$\zeta=O(t^{-1})$.

从而

$$-2t^{-a/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\zeta v^{(m)}u^{(m-1)}dx$$

$$\leqslant\frac{1}{t^{1+a}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(t\zeta)^2}{\varepsilon}(u^{(m-1)})^2dx+\frac{\varepsilon}{t}\int_{-\infty}^{+\infty}(v^{(m)})^2dx$$

从而 $Y'_m(t)\leqslant\left(\frac{C^3}{t^a}+\frac{\varepsilon}{t}\right)Y_m(t)+\frac{C_4}{t^{1+a}}X_{m-1}(t)$

其中，$C_3=\sup\limits_{x,t}\{t^{a/2}(|\lambda_{1x}|+2|\xi|\}$，$C_4=\sup\limits_{x,t}\left(\frac{|t\zeta|^2}{\varepsilon}\right)$，可取$\varepsilon$使之满足$0<\varepsilon<1-a$。

引理 5 记：

$$\overline{X}_m(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}(\partial_x u^{(m)})^2dx,\overline{Y}_m(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}(\partial_x v^{(m)})^2dx,$$

则存在常数$C_1,C_2,C_3,C_4>0$，使：

$$\overline{X}'_0(t)\leqslant\frac{C_1}{t^a}\overline{X}_0(t)+\frac{C_2}{t^a}X_0(t)+Y_0(t);$$

$$\overline{Y}'_0(t)\leqslant\frac{C_1}{t^a}\overline{Y}_0(t)+\frac{C_2}{t^a}Y_0(t)+\overline{F}(t);$$

$$\overline{X}'_m(t)\leqslant\frac{C_1}{t^a}\overline{X}_m(t)+\frac{C_2}{t^a}X_m(t)+\overline{Y}_m(t);$$

$$\overline{Y}'_m(t)\leqslant\frac{C_1}{t^a}\overline{Y}_m(t)+\frac{C_2}{t^a}Y_m(t)+\frac{\varepsilon}{t}\overline{Y}_m(t)+\frac{C_3X_{m-1}(t)}{t^{1+a}}+\frac{C_4\overline{X}_{m-1}(t)}{t^{1+a}},(m\geqslant1)$$

其中 $\overline{F}=\int_{-\infty}^{+\infty}f_x^2dx$，$0<\varepsilon<1-a$。

证明 只证明当$m\geqslant1$时$\overline{Y}'(t)$的估计式。

由引理2和3知，$v_{xx}^{(m)}\in C(R\times[0,T])$，从而由迭代式$(V)_m$得到

$t^{a/2}\partial_t\partial_x v^{(m)}=\lambda_1\partial_x^2v^{(m)}+\lambda_{1x}\partial_x v^{(m)}-\xi_x v^{(m)}-\xi\partial_x v^{(m)}-\zeta_x u^{(m)}-\zeta_x\partial_x u^{(m-1)}$

是$R\times(0,T]$中的连续函数，另外注意u_x对于每一个$t\in[0,T]$同样关于x有紧支集，从而：

$\overline{Y}'_m(t)=2\int_{-\infty}^{+\infty}\partial_x v^{(m)}\partial_x\partial_t v^{(m)}dx$

$=2t^{-a/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\partial_x v^{(m)}(\lambda_1\partial_x^2v^{(m)}+\lambda_{1x}\partial_x v^{(m)}-\xi_x v^{(m)}-\xi\partial_x v^{(m)}-\zeta_x u^{(m-1)}-\zeta\partial_x u^{(m-1)})dx$

注意当$t\to0$时，$\zeta=O(t^{-1}),\zeta_x=O(t^{-1})$，于是

$$\overline{Y}'_m(t)\leqslant\frac{C_1}{t^a}\overline{Y}_m(t)+\frac{C_2}{t^a}Y_m(t)+\frac{\varepsilon}{t}\overline{Y}_m(t)+\frac{C_3}{t^{1+a}}X_{m-1}(t)+\frac{C_4\overline{X}_{m-1}(t)}{t^{1+a}}$$

其中 $C_1=\sup\limits_{x,t}\{t^{a/2}(|\lambda_{1x}|+2|\xi|)\}$，$C_2=\sup\limits_{x,t}\{t^{a/2}|\xi_{xx}|\}$，

$$C_3=\sup_{x,t}\left(\frac{2|t\zeta_x|^2}{\varepsilon}\right),\quad C_4=\sup_{x,t}\left(\frac{2|t\zeta|^2}{\varepsilon}\right)$$

可取常数ε满足$0<\varepsilon<1-a$

引理 6 设：$\hat{X}(t)=\overline{X}_m(t)+X_m(t)$，$\hat{Y}_m(t)=\overline{Y}_m(t)+Y_m(t)$，则存在常数$C>0$，使如下不等式成立：

$$\begin{cases} \hat{X}_0(t) \leqslant C^2 t \int_0^t \hat{F}(\tau) d\tau \\ \hat{Y}_0(t) \leqslant C \int_0^t \hat{F}(\tau) d\tau \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{X}_m(t) &\leqslant \frac{C^{2(m+1)} t^{1+m(1-\alpha)}}{(1+\varepsilon)^m (1-\alpha)^{m-1} (1-\alpha-\varepsilon)} \int_0^t \hat{F}(\tau) d\tau \\ \hat{Y}_m(t) &\leqslant \frac{C^{2m+1} t^{m(1-\alpha)}}{(\alpha+\varepsilon)^m (1-\alpha)^{m-1} (1-\alpha-\varepsilon)} \int_0^t \hat{F}(\tau) d\tau \end{aligned}\right\} \quad (m \geqslant 1)$$

其中$\hat{F}(t) = \bar{F}(t) + F(t), 0 < \varepsilon < 1-\alpha$.

证明 由引理4与5可得下列不等式：

$$\hat{X}_0'(t) \leqslant \frac{C_1}{t^\alpha} \hat{X}_0(t) + C_2 \hat{Y}_0(t),\ \hat{Y}_0'(t) \leqslant \frac{C_1}{t^\alpha} \hat{Y}_0(t) + \hat{F}(t),$$

$$\hat{X}_m'(t) \leqslant \frac{C_1}{t^\alpha} \hat{X}_m(t) + C_2 \hat{Y}_m(t),\ \hat{Y}_m'(t) \leqslant \left(\frac{C_1}{t^\alpha} + \frac{\varepsilon}{t} \right) \hat{Y}_m(t) + \frac{C_2 \hat{X}_{m-1}(t)}{t^{1+\alpha}}$$

其中C_1, C_2均为正常数，由此得：

$$\hat{X}_0(t) \leqslant C \int_0^t \hat{Y}_0(\tau) d\tau,\ \hat{Y}_0(t) \leqslant C \int_0^t \hat{F}(\tau) d\tau \qquad (\mathrm{IX})_0$$

$$\hat{X}_m(t) \leqslant C \int_0^t \hat{Y}_m(\tau) d\tau,\ \hat{Y}_m(t) \leqslant C t^\varepsilon \int_0^t \frac{\hat{X}_{m-1}(\tau)}{\tau^{1+\alpha+\varepsilon}} d\tau \qquad (\mathrm{IX})_m$$

其中$C > 0$为常数。

我们只就上面最后一个加以说明，以

$$e^{-\left(\ln t^\varepsilon + \frac{C_1 t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right)}$$

乘以$\hat{Y}_m'(t)$的估计式两边，则有

$$\frac{d}{dt}\left\{ \hat{Y}_m(t) \exp\left[-\left(\ln t^\varepsilon + \frac{C_1 t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) \right] \right\} \leqslant C_2 \exp\left(-\frac{C_1 t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) \frac{\hat{X}_{m-1}(t)}{t^{1+\alpha+\varepsilon}}$$

积分上面不等式，根据引理3知，当 $t \to 0$时，有

$$\hat{Y}_m(t) = O(t^{2-2\alpha})$$

因$\varepsilon < 1-\alpha$，故$2-2\alpha > \varepsilon$，于是

$$\hat{Y}_m(t) \leqslant C_2 t^\varepsilon \exp \frac{C_1 t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \int_0^t \exp\left(-\frac{C_1 \tau^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) \frac{\hat{X}_{m-1}(\tau)}{\tau^{1+\alpha+\varepsilon}} d\tau$$

或 $$\hat{Y}_m(t) \leqslant C t^\varepsilon \int_0^t \frac{\hat{X}_{m-1}(\tau)}{\tau^{1+\alpha+\varepsilon}} d\tau$$

其中$C = C_2 e^{\frac{C_1 T^{1-\alpha}}{1-\alpha}}$。注意上式右端积分存在。由引理3知：$\hat{X}_m(t) = O(t^{2-\alpha})$，$(t \to 0)$。

从而，$(2-\alpha) - (1+\alpha+\varepsilon) = (2-2\alpha-\varepsilon) - 1 > -1$，故$\int_0^t \frac{\hat{X}_{m-1}(\tau)}{\tau^{1-\alpha-\varepsilon}} d\tau$存在。

将(Ⅸ)$_0$式的第二式代入第一式并交换积分号得：

$$\hat{X}_0(t)\leqslant C^2\int_0^t d\tau\int_0^\tau \hat{F}(S)ds=C^2\int_0^t(t-\tau)\hat{F}(\tau)d\tau\leqslant C^2t\int_0^t\hat{F}(\tau)d\tau$$

将(Ⅸ)$_m$的第二式代入第一式得：

$$\hat{X}_m(t)\leqslant C^2\int_0^t\tau^\varepsilon d\tau\int_0^\tau\frac{\hat{X}_{m-1}(S)}{S^{1+\alpha+\varepsilon}}ds$$

$$=C^2\int_0^t\frac{\hat{X}_{m-1}(\tau)}{\tau^{1+\alpha+\varepsilon}}d\tau\int_\tau^t s^\varepsilon ds$$

$$=\frac{C^2}{1+\varepsilon}\int_0^t\frac{(t^{1+\varepsilon}-\tau^{1+\varepsilon})}{\tau^{1+\alpha+\varepsilon}}\hat{X}_{m-1}(\tau)d\tau$$

$$\leqslant\frac{C^2}{1+\varepsilon}t^{1+\varepsilon}\int_0^t\frac{\hat{X}_{m-1}(\tau)}{\tau^{1+\alpha+\varepsilon}}d\tau$$

同理可得：

$$\hat{Y}_m(t)\leqslant\frac{C^2t^\varepsilon}{\alpha+\varepsilon}\int_0^t\frac{\hat{Y}_{m-1}(\tau)}{\tau^{\alpha+\varepsilon}}d\tau$$

于是可分别迭代得到$\hat{X}_m(t)$和$\hat{Y}_m(t)$的估计式：

$$\hat{X}_m(t)\leqslant\frac{C^{2(m+1)}t^{1+m(1-\alpha)}}{(1+\varepsilon)^m(1-\alpha)^{m-1}(1-\alpha-\varepsilon)}\int_0^t\hat{F}(\tau)d\tau,$$

$$\hat{Y}_m(t)\leqslant\frac{C^{2m+1}t^{m(1-\alpha)}}{(\alpha+\varepsilon)^m(1-\alpha)^{m-1}(1-\alpha-\varepsilon)}\int_0^t\hat{F}(\tau)d\tau$$

4. 讨论(Ⅲ)的解的存在唯一性

命题 1 函数列$\{u^{(m)}\}$和$\{v^{(m)}\}$由引理3给出，设：

$$u=\sum_{m=0}^{\infty}u^{(m)}(x,t),\ v=\sum_{m=0}^{\infty}v^{(m)}(x,t)\qquad(\text{X})$$

则有如下结论：

(1) 存在常数$T_0>0$，满足$0<T_0<T$，使得级数(X)在$H_1(R)$中关于$t\in[0,T_0]$一致收敛；

(2) 对于任意正数δ，满足$0<\delta<T_0$，级数(X)关于t的导数对$t\in[\delta,T_0]$一致收敛；

(3) (X)的极限函数u和v在$R\times(0,T_0]$中满足方程组(Ⅳ)及初始条件；

(4) (Ⅳ)之解唯一。

证明 由引理6知存在T_0，$0<T_0<T$，使级数(X)在$H_1(R)$中关于$t\in[0,T_0]$一致收敛。从而由关系式：

$$\begin{cases}t^{\alpha/2}\partial_t u^{(m)}=\lambda_2\partial_x u^{(m)}+\eta u^{(m)}+v^{(m)}\\ t^{\alpha/2}\partial_t v^{(m)}=\lambda_1\partial_x v^{(m)}-\xi v^{(m)}-\zeta u^{(m-1)}\end{cases}$$

可知：对于任意小数$\delta>0$，(X)关于t的导数都在$L_2(R)$中关于$t\in[\delta,T_0]$一致收敛。

于是由(Ⅴ)$_m$关于m从0到N求和并令$N\to+\infty$，则知u和v满足方程组(Ⅳ)，满足初

始条件是显然的，注意极限过程是在$L_2(R)$中进行的，且$t\in(0,T_0]$，从而u和v的定义区域是$R\times[0,T_0]$。

下面证明唯一性。只须证明(Ⅳ)中$f\equiv0$时只有解$u\equiv v\equiv0$即可。设

$$X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}u^2dx,\quad Y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}v^2dx$$

利用(Ⅳ)中的方程及引理6的证法知，存在常数$C>0, 0<\varepsilon<1-\alpha$（这里的$\varepsilon$与引理6中的$\varepsilon$一致）使得：

$$X(t)\leqslant C\int_0^t Y(\tau)d\tau$$

$$Y(t)\leqslant Ct^{\varepsilon}\int_0^t \frac{X(\tau)}{\tau^{1+\alpha+\varepsilon}}d\tau$$

由$v\in C([0,T_0],H_1(R))$知上面第二个不等式的积分存在。从而由上面第一个不等式知，$t\to0$时，$X(t)=O(t)$，这样，再由引理6的证法得：

$$X(t)\leqslant\frac{C^{2m}t^{1+\varepsilon+(m-1)(1-\alpha)}}{(1+\varepsilon)^m(1-\alpha)^{m-1}}\int_0^t\frac{X(\tau)}{\tau^{1+\alpha+\varepsilon}}d\tau$$

$$Y(t)\leqslant\frac{C^{2m}t^{\varepsilon+(m-1)(1-\alpha)}}{(\alpha+\varepsilon)^m(1-\alpha)^{m-1}}\int_0^t\frac{Y(\tau)}{\tau^{\alpha+\varepsilon}}d\tau$$

令$m\to+\infty$，便知当$t\in[0,T_0]$时，只有$X(t)\equiv Y(t)\equiv0$.

命题 2 (Ⅳ)的解关于自变量t的区域可由$[0,T_0]$延拓到$[0,T]$中，并保持性质。

证明 取正数$T_1>0$，使$0<T_1<T_0$，并取命题1中所求得的u和v在$t=T_1$上的值为初值，记为u_0和v_0，考虑初值问题：

$$\begin{cases}(t^{\alpha/2}\partial_t-\lambda_2\partial_x-\eta)u=v & (x,t)\in R\times(T_1,T]\\(t^{\alpha/2}\partial_t-\lambda_1\partial_x+\xi)v=f-\zeta u\\u|_{t=0}=u_0,\quad v|_{t=0}=v_0\end{cases}$$

显然，这是一个严格双曲型方程组的Cauchy问题。注意$u_0,v_0\in H_1(R)$，由[5]知该问题有唯一解：

$$u,v\in C^1([T_1,T],L_2(R))\cap C^0([T_1,T],H_1(R))$$

再由解的唯一性，便得到(Ⅳ)在$R\times[0,T]$中的解：

$$u,v\in C^1((0,T],L_2(R))\cap C^0([0,T],H_1(R))$$

综合命题1—2，即得定理1的证明。（注：其实定理1的条件可以进一步减弱）

定理 2 设(1)所涉及的函数都是实的，并$a(x,t),\varphi(x),\psi(x)$, $\lambda_j(x,t)$ $(j=1,2)$, $f(x,t)$满足原来的假设条件，$0<\alpha<1$为常数，则当下列条件满足时：

(A) $c(x,t)\in C((0,T],C^2(R))$，且

$$\sup_{x,t}\{t^{\alpha/2}(|C(x,t)|+|C_x(x,t)|)\}<+\infty$$

(B) $b(x,t)\in C^1((0,T],C^2(R))$，且

$$\sup_{x,t}\{|t^{1+\alpha/2}b_t|+|t^{\alpha/2}b|+|t^{\alpha/2}b_x|+|t^{\alpha/2}b_{xx}|\}<+\infty,$$

(Ⅰ)必存在唯一弱解u满足：

$$u\in C([0,T],H^1(R))\cap C^1((0,T],L_2(R))$$

证明 只要注意定理1的证明过程即可。

参 考 文 献

[1] A.B.Бицадзе.线性偏微分方程的某些线性定解问题. 数学进展. 1958年第3期

[2] 王传芳. 一类Euler-Poisson-Darboux方程的奇性混合问题(I). 杭州大学学报，1979年第4期

[3] 凌岭. Euler-Poisson方程奇性混合问题. 西北大学学报，1980年第4期

[4] J.B.Diaz and H.F.Weinberger A solution of the singular initial value problem for the Euler-Poisson-Darboux equation Proc.Amer.Math.Soc., 4(1953)703—718

[5] Kumano—go, H.Pseudodifferential Operators.MIT Press, 1982

我校精密机床动态检测与精度控制技术达到国际先进水平

国防科技大学等单位的科技人员，积极跟踪发达国家机电相互渗透和结合的新潮流，成功地将电子计算机、微电子检测和控制等新技术以及机械发展的新成果，综合开发，研究出“精密机床动态检测与精度控制”技术，并于最近通过国家级鉴定。

超精密加工技术历来是一个国家的工业水准和科技发展的标志。目前，我国的超精密加工大部分仍然采取传统的方式，不仅耗费大量的人力、资金，而且由于周期长、加工产品的质量达不到一定的精度，严重影响了产品的更新和在国际市场上的竞争力。国防科大等单位在接受国家下达的这项科研任务后，课题组的科研人员集思广益，采用动态测量和误差补偿控制的手段代替传统的加工方式，并在加工的尺寸精度、圆度、直度等方面，进行了大量的开拓性工作，终于使我国开发超精密加工技术取得重大突破。该项成果的应用表明：这种技术可以大幅度提高原有的加工精度，稳定地达到微米级（相当头发丝直径的1／70）和亚微米级（相当于头发丝直径的1／140）的要求。系统操作简便，稳定可靠，不仅缩短了产品加工周期，提高了质量，还大大减轻了工人的劳动强度。

鉴定会上，专家们对这一成果予以高度评价，认为：该项技术具有独创性，已经达到国际同类技术的先进水平，为超精密技术的发展开辟了新的途径。它的广泛应用，为我国数量众多的机床的技术改造，提供了可靠保证。

（梁滨等）

The Singular Initial Valuc Problem for a Class of Partial Differential Equations

Kong Rong

Abstract

In this paper we discuss a class of partial differential equations with singular coefficients, the initial problem for which can be solved uniquely. We have proved the following theorem:

The problem:

$$\begin{cases} L_u \equiv [(t^{a/2}\partial_t - \lambda_1(x,t)\partial_x)(t^{a/2}\partial_t - \lambda_2(x,t)\partial_x) + a(x,t)\partial_t \\ \qquad + b(x,t)\partial_x + c(x,t)]u(x,t) = f(x,t) \\ \qquad\qquad (x,t) \in R \times (0,T] \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \lim\limits_{t\to 0} t^{a/2}u_t = \psi(x) \end{cases}$$

can be solved uniquely by $u \in C([0.T], H_1(R)) \cap C^1((0,T], L_2(R))$ if the following conditions are satisfied.

(A) a is a constant and $0 < a < 1$, all the functions being real;

(B) $a(x,t), b(x,t), c(x,t), \lambda_j(x,t) (j=1,2) \in C'([0,T], C^2(R))$ and all the derivatives of the above functions are bounded by the constant:

(C) $\varphi(x), \psi(x) \in C_0^4(R)$

(D) $f(x.t) \in c((0.T], C_0^2(R))$, and

$$\sup_{x,t}\left\{ t^{a/2} \sum_{j=0}^{2} \left|\frac{d^j u}{dx^j}\right| \right\} < +\infty$$

(E) There exists a constant $\delta > 0$, such that

$$|\lambda(x,t) - \lambda_2(x,t)| \geqslant \delta$$

where $(x,t) \in R \times [0,T]$.

In the proof, we use the particular sets of energy inequalities.

A generalizatitn of the theorem is obtained.

Key words: Partial differential equations, Singnlar Coefficients