国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第10卷第3期　1988年9月　Vol.10.No.3

两类新的Nash平衡点的精选

侯思祥
（系统工程与应用数学系）

摘　要：本文从系统的观点出发，对n－人非合作对策的解点作了探讨，提出了两类新的Nash平衡点的精选，并证明了其存在性。这两种Nash平衡点分别称之为第一类Nash平衡点和第二类Nash平衡点。第一类Nash平衡点具有冒险性，第二类Nash平衡点具有保守性，二者都满足整体上的最优性。

关键词：对策论，平衡点

1. 引　言

一个有限的n-人策略型对策是$\Gamma=\{\phi^1,\cdots,\phi^n;\ f^1,\cdots,f^n\}$，这里$\phi^i$，$i=1,2,\cdots,n$是非空的有限集；$f^i,i=1,2,\cdots,n$是一个映射：

$$f^i:\ \prod_{j=1}^{n}\varphi^j\to R$$

其中$\varphi^j\in\phi^j,j\in N,N=\{1,2,\cdots,n\}$．集合$\phi^i$称为局中人$i$的纯策略集合，$f^i$是局中人$i$的支付函数。

记$m_i=|\phi^i|$——ϕ^i中元素的个数。为方便起见，记$\phi^i=\{e^i_1,e^i_2,\cdots,e^i_{m_i}\}$，并记$I^i=\{1,2,\cdots,m_i\}$．局中人$i$的混合策略是指$s^i=\{s^i_1,s^i_2,\cdots s^i_{m_i}\}$，其中

$$s^i\in S^i=\{(s^i_1,s^i_2,\cdots,s^i_{m_i}),\ \sum_{k=1}^{m_i}s^i_k=1,s^i_k\geqslant 0,\ \forall k\in I^i\}.$$

再记

$$S=\prod_{i\in N}S^i.$$

$\forall s\in S,\ \forall k\in N$，局中人$k$的支付为

$$f^k(s)=\sum_{i_1}\cdots\sum_{i_n}s^1_{i_1}s^2_{i_2}\cdots s^n_{i_n}f^k(e^1_{i_1},e^2_{i_2},\cdots e^n_{i_n})。$$

定义1　$\forall s^i\in S^i$，S^i的支撑（Carrier）是$C(s^i)=\{k;\ k\in I^i,\ s^i_k>0\}$．记$C(s)=\prod_{i\in N}C(s^i)$．

策略$s|t^i$是指在策略$s=(s^1,s^2,\cdots,s^n)$中局中人i改变策略s^i为t^i．Nash平衡点是指满足如下条件的点$s\in S$：$f^k(s)\geqslant f^k(s|t^k)$，$\forall k\in N$即是当一个局中人单独改变策略时，他的支付不会增加。Nash证明了这种平衡点的存在性。记非合作对策Γ中全体Nash平衡点的集合为$E[\Gamma]$。

1986年10月4日收到

一般来说，一个非合作对策可能具有许多Nash平衡点，甚至为不可数个。大量例子可以说明某些Nash平衡点是不合理的，因而不会为局中人所采用。这就出现了选择哪一个作为对策的解的问题。这个问题提出后，人们作了广泛的研究，基本上是从两个方面来探讨：一个是从策略方面，即当策略稍微变动时，平衡点具有稳定性，这就产生了完全平衡点（Perfect equilibrium Point见Eric Van Damme[1]）。另一个是从支付方面，即是当对策的支付稍微变化时，平衡点的变动应该是微小的，由此引出了本质平衡点（Essential equilibrium Point见Eric Van Damme[2]）。以上两个方面的探讨是从策略和支付的局部行为出发来研究平衡点的稳定性行为。本文则致力于从系统的观点出发来解决Nash平衡点的精选问题。

在以下各节中，除非特别声明外，元素的上标号指局中人的序号，下标号指局中人的纯策略的序号。记号$f^k(s|\{t^i,i\in T\})$表示T中局中人改变他们的策略s^i为t^i时局中人k的支付。

2. 第一类Nash平衡点

对于任一个$s\in E[\Gamma]$，由Nash平衡点的定义，当某一局中人单独改变策略时，其支付不增。由于在非合作对策中，局中人之间是无制约的，而且平衡点往往不止一个，这就有可能两个局中人或更多的局中人同时改变他们的策略。在这种情况下，两个局中人或多个局中人的支付之和就有可能增加。为此，我们考虑如下的第一类平衡点。

$\forall T\subseteq N$，记

$$V_T(s)=\max_{\substack{t^i\in S^i\\ i\in t}}\sum_{j\in T}[f^j(s|\{t^i,i\in T\})-f^j(s)]$$

即T中局中人同时改变策略时，其支付之和所能获得的最大差值。

$\forall s\in E[\Gamma]$，作

$$V(s)=\begin{pmatrix}\theta_1(s)\\ \vdots\\ \theta_{2^n}(s)\end{pmatrix}$$

其中 $\theta_1(s)=\max\limits_{T\subseteq N}V_T(s)=V_{T_1}(s)$

$$\theta_2(s)=\max_{\substack{T\subseteq N\\ T\neq T_1}}V_T(s)=V_{T_2}(s)$$

$$\vdots$$

$$\theta_{2^n-1}(s)=\max_{\substack{T\subseteq N\\ T\neq T_1,\cdots,T_{2^n-2}}}v_T(s)=v_{T_{2^n-1}}(s)$$

$$\theta_{2^n}(s)=\max_{\substack{T\subseteq N\\ T\neq T_1,\cdots,T_{2^n-1}}}v_T(s)=v_{T_{2^n}}(s)$$

记所有$v(s)$的集合为$v(E[\Gamma])$。

定义 2 $\forall s,t\in E[\Gamma]$，$s<t$是指$v(s)$按字典序小于$v(t)$，即存在k使得

$$\theta_l(s)=\theta_l(t)\qquad l=1,2,\cdots,k-1.$$

$$\theta_k(s)<\theta_k(t)$$

定义 3 按定义2中的序，$E[\Gamma]$ 中的最小元称为第一类Nash平衡点。记所有第一类Nash平衡点的全体为 $E_1[\Gamma]$。

我们之所以精选出第一类Nash平衡点，是因为对于这种点，当某些局中人改变策略时，其所能得到的好处在定义2意义下是最小的。下面将证明第一类Nash平衡点的存在性。

引理 1 $E[\Gamma]$ 为有界闭集。

证明 由于Γ是一个有限策略的n-人非合作对策，故 $E[\Gamma]$是有界的。

若 $s_k\in E[\Gamma]$（注：s_k是策略组。），$s_k\xrightarrow[k\to+\infty]{}s$. 由Nash平衡点的定义，$\forall t^i\in S^i$，$i\in N$，

$$f^i(s_k|t^i)\leqslant f(s_k)\qquad \forall k \text{ 成立。}$$

因 $f^i(i\in N)$ 是连续函数，上式两端对 k 取极限得到

$$f^i(s|t^i)\leqslant f^i(s)\qquad \forall i\in N$$

由 $t^i\in S^i$ 的任意性，知道 $S\in E[\Gamma]$。故 $E[\Gamma]$ 是有界闭集。

引理 2 $\forall T\subseteq N$，$v_T(s)$ 是 s 的连续函数。

证明 $\forall s\in E[\Gamma]$，由定义

$$v_T(s)=\max_{\substack{t^i\in S^i\\ i\in T}}\sum_{j\in T}[f^j(s|\{t^i,i\in T\})-f^j(s)]$$

记

$$g_T(s|\{t^i,\ i\in T\})=\sum_{j\in T}[f^j(s|\{t^i,i\in T\})-f^j(s)],$$

由于 $f^j(s)$，$j\in N$ 是一个多元多项式函数，故 $g_T(s|\{t^i,i\in T\})$ 是 s 和$\{t^i,\ i\in T\}$ 的连续函数。

作集值映射 φ_T:

$$s\longmapsto\varphi_T(s)=\{\{t^i,\ i\in T\};\ t^i\in S^i,\ i\in T\}.$$

由 $S^i(i\in T)$的紧性，即 $\varphi_T(s)$是连续的紧集值映射。根据熟知的连续性判别准则，函数

$$v_T(s)=\max_{\substack{t^i\in S^i\\ i\in T}}g_T(s|\{t^i,i\in T\})$$

$$=\max_{\{t^i,i\in T\}\in\varphi_T(s)}g_T(s|\{t^i,i\in T\})$$

是连续的。

定理 1 在 $E[\Gamma]$ 中存在第一类Nash平衡点。

证明 定义

$$[v(E[\Gamma])]'=\left\{s\left|\begin{array}{l}s\in E[\Gamma]\\ \forall t\in E[\Gamma],\quad \theta_1(t)\geqslant\theta_1(s)\end{array}\right.\right\}$$

一般地，定义

$$[v(E[\Gamma])]^{(k)}=\left\{s\left|\begin{array}{l}s\in[v(E[\Gamma])]^{(k-1)}\\ \forall t\in[v(E[\Gamma])]^{(k-1)},\quad \theta_k(t)\geqslant\theta_k(s)\end{array}\right.\right\}$$

$k=1,2,\cdots,2^n$

又可以证明 $\theta_k(s)=\underset{T_k\in\{T_k\},T\subseteq T_k}{\mathrm{MaxMin}}\ v_s[T]$（见 Schmeidler[3]），这里 T_k 是 N 中 k 个不同元素的集合，$\{T_k\}$ 是所有这种 T_k 的全体，$k=1,2,\cdots,n$。由此可见 $\theta_k(s)$ 是连续的。

由 $E[\Gamma]$ 的紧性，可知 $[v(E[\Gamma])]'$ 是非空的紧集。同理 $[v(E[\Gamma])]^{(k)}$ 是非空的紧集，$k=1,2,\cdots,2^n$。特别地，$[v(E[\Gamma])]^{(2^n)}$ 是非空的，根据 $[v(E[\Gamma])]^{(2^n)}$ 的定义和第一类 Nash 平衡点的定义，$E_1[\Gamma]=[v(E[\Gamma])]^{(2^n)}$，故 $E_1[\Gamma]$ 非空。定理得证。

3. 第二类 Nash 平衡点

根据 Nash 平衡点的定义，当某一局中人单独改变策略时，此局中人的支付不会增加，不仅如此，这还会改变其它局中人的支付。由于 Nash 平衡点不是唯一的，局中人之间又毫无制约关系，这就使得局中人在参加对策时考虑到某个或某些局中人改变策略时对自己支付的影响。也就是说，$\forall\, T\subseteq N$，$T\neq N$，当 T 中局中人同时改变策略时，可能改变他们内部的支付，同时也给 $N\backslash T$ 中的局中人的支付带来影响，因此，我们考虑如下的第二类 Nash 平衡点的概念。

$\forall\, T\subseteq N$，记

$$u_T(s)=\min_{\substack{t^i\in s^i\\ i\in T}}\sum_{j\in N\backslash T}[f^j(s|\{t^i\in S^i,\ i\in T\})-f^j(s)]$$

即当 T 中局中人改变策略 S 时，给 $N\backslash T$ 中局中人可能带来的影响之和的最小值。

如果 n 个局中人都改变策略，他们将不会给全体局中人之外的人带来影响，即 $u_N(s)=0$。

$\forall\cdot s\in E[\Gamma]$，作

$$\eta_1(s)=\max_{T\subseteq N}u_T(s)=u_{T_1}(s)$$

$$\eta_2(s)=\max_{\substack{T\subseteq N\\ T\neq T_1}}u_T(s)=u_{T_2}(s)$$

$$\vdots$$

$$\eta_{2^n-1}(s)=\max_{\substack{T\subseteq N\\ T\neq T_1,\cdots,T_{2^n-2}}}u_T(s)=u_{T_{2^n-1}}(s)$$

$$\eta_{2^n}(s)=\max_{\substack{T\subseteq N\\ T\neq T_1,\cdots,T_{2^n-1}}}u_T(s)=u_{T_{2^n}}(s)$$

$$\eta(s)=\begin{pmatrix}\eta_1(s)\\ \vdots\\ \eta_{2^n}(s)\end{pmatrix}$$

定义 4 $\forall\, s,t\in E[\Gamma]$，$s\prec t$ 是指 $\eta(s)$ 按字典序小于 $\eta(t)$，即存在 k，使得

$$\eta_l(s)=\eta_l(t)\qquad l=1,2,\cdots,k-1.$$

$$\eta_k(s)<\eta_k(t)$$

定义 5 在 $E[\Gamma]$ 中按照定义 4 中规定的序的最大元称为第二类 Nash 平衡点。记其全体为 $E_2[\Gamma]$。

第二类 Nash 平衡点是指当某些局中人改变策略时给其它局中人带来的支付的减小在上述意义下最小的 Nash 平衡点。仿照上一节，也可证明 $E_2[\Gamma]$ 的非空性，我们有

定理 2　$E[\Gamma]$ 中存在第二类 Nash 平衡点。

4. 关系及其意义

$E_1[\Gamma]$ 和 $E_2[\Gamma]$ 分别是从不同的角度对 Nash 平衡点作了精选。$E_1[\Gamma]$ 是由当个体或群体局中人改变策略时，对他们自己产生的增量在定义 2 的意义下最小的点组成。对于这样的点，各个局中人都尽量不改变自己的策略，因为改变策略后，所得到的支付的增加很小。这个平衡点策略对局中人来说具有冒险性，当某些局中人确实改变策略时，可能给各局中人的支付带来较大的减少。$E_2[\Gamma]$ 是由使个体或群体局中人改变策略时，对他们之外的局中人的支付的减少最小的 Nash 平衡点所组成。这样，局中人将会放心地使用这种策略，这是因为当其它局中人改变策略时，自己支付的减少最小。这个平衡点策略对局中人来说具有保守性，当某些局中人确实改变策略时，其它局中人支付的减少是很小的。

例 1

	L_2	R_2
L_1	1 1	10 0
R_1	0 10	10 10

每一个方格中代表两局中人的支付，左上角值代表局中人 1 的支付，右下角值代表局中人 2 的支付。

$$E[\Gamma]=\{(L_1,\ L_2);\ (R_1,\ R_2)\}$$

$$E_1[\Gamma]=\{(R_1,\ R_2)\}$$

局中人采取第一类 Nash 平衡点的支付为(10，10)，显然，这个策略组具有冒险性。

$$E_2[\Gamma]=\{(L_1,\ L_2)\}$$

局中人采取第二类 Nash 平衡点的支付为 (1，1)，显然，这个策略组具有保守性。

从此例可以看出，一般说来 $E_1[\Gamma]\neq E_2[\Gamma]$。

在实际工作中，人们可以根据不同的问题，选择合适的平衡点。

致　　谢

本文是在刘德铭教授的指导下完成的，在此表示感谢。

参 考 文 献

[1] Eric Van Damme. Refinements of the Nash equilibrium Concept, 1983

[2] Marchi, E.Some topics on equilibrium.Transa.Amer. Math. Soc., 220(1976),87—102

[3] Scimeidler, D.The nucleolus of a characteristic function game. SIAMJ, Appli. Math., 17(1969), 1163—1170

[4] Weber, R.J.Noncooperative games. Pro, Symposia in applied mathematics, 24(1981), 80—87

[5] 刘德铭著．对策论，国防科技大学讲义

Two New Refinement Types of Nash Equilibrium Point

Hou Sixiang

Abstract

In this paper, by uiewpoints of system engineering we study the solutions of n—person noncooperative games, give two new refinement types of Nash equilibrium point: lst Nash eqailibrium point (lst Nash e.p.) and 2nd Nash equilibrium point (2nd Nash e.p.), and prove its existence. There is risk in the lst Nash e.p, conservation in the 2nd Nash e.p, both e.p. satisfying the global optimization.

Key words: Game Theory, Equilibrium point

The Method of Convex Persevering Fitting of Curves for CAD/CAM

Fang Kui Qiang Zhengzai

Abstract

This paper given discribes a convex persevering fitting method. Given a sequence of points $\{p_i\}_{i=0}^{n}$ on a plane, a c'-quadratic (c^2-cubic) convex persevering parametric splinc interpolation curve with Bezier curve seqment is constructed.

Also is discussed its applications on CAD/CAM, for example, figure fitting of convex wheel.

Key words: Parametric curve, Interpolating spline, Convex persevering fitting

Some Problems of Structural Dynamic Stability

Zhuo Shyjun Zhou Kejian

Abstract

Some problems of structural dynamic stability are briefly introduced