国 防 科 技 大 学 学 报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第10卷第4期 1988年12月 Vol.10.No.4

时间序列分析中的模型定阶策略

吕 锐
（电子技术系）

摘　　要

模型的定阶问题是时间序列分析（包括参数谱估计、系统辨识，回归分析）研究领域中的一个重要问题。本文对现有的数种模型定阶方法，进行了分析、讨论和归纳，指出了它们所适用的场合及优劣。

关键词：时间序列分析，谱估计，系统辨识，建模，定阶

1 引　言

模型定阶是参数谱估计，系统辨识，建模和回归分析中经常遇到的一个问题。例如，在进行参数谱估计过程中，可先将待估计谱的过程看成某个ARMA过程，然后设法估计出该ARMA模型的参数而达到谱估计的目的；这里首先遇到的问题，也是极其重要的问题，是如何正确有效地判定ARMA过程的阶。因为只有正确有效地判定过程的阶，才能最后正确地完成谱估计。

从目前的研究来看，构造有效的定阶策略有如下两种主要途径：一是利用过程的自相关序列构造关于阶的度量量，并选用一个合适的门限判定阶数；另外，利用模型拟合的残差信息，并选取一个合适的准则函数判定模型的阶。用残差构造的F-分布检验亦可用来判定模型的阶。由于残差序列可由过程的自相关序列获得，所以，从理论上说，它们都可以统称为基于过程自相关序列的时域定阶法。

定阶策略的研究工作大多数都限于时域。这主要原因是：1. 在实际观测过程中，所能获得的知识是有限长度的过程自相关序列的估计。因此，用过程自相关序列来构造模型阶的度量量比较方便，物理上也比较直观。2. 大多数这类定阶策略可以在定阶的同时将模型参数估计出来。因此，定阶处理不会花费太多的计算量，便于实时处理。

下面，我们将具体分析和讨论几个典型的定阶策略，并比较它们的优劣及适用场合。

2 基于残差信息的几种定阶策略

考虑如下的ARMA(N, M)过程$x(n)$：

$$\sum_{i=0}^{N} a_i x(n-i) = \sum_{i=0}^{M} b_i w(n-i) \qquad (1)$$

其中a_i及b_j，$i=0,1,\cdots,N$；$j=0,1,\cdots,M$是过程$x(n)$的$N+M+2$个常参数，且

1987年12月25日收稿

$a_0=1$；(N, M)称为如(1)式的ARMA 模型的阶。假定激励$\{w(n)\}$是零均值，单位方差的平稳白色序列。

图 1 信号模型

设过程$x(n)$的自相关序列为$\{\phi(n)\}$，且

$$\phi(n)=E\{x(k)x(k-n)\} \tag{2}$$

由模型的拟合误差(或预测误差)来判明所拟合的模型阶数是否恰当，是很直观的定阶方法。因为用一个ARMA模型去拟合测量序列，希望能精细地反映原过程的性质，因此，拟合误差（残差）的大小，即拟合结果的好坏可以做为模型拟合优劣的检验标准。在这方面，Akaike[1]~[4]的工作是最优秀的。他所提出的FPE(Final Prediction Error)准则，AIC(A-Information Criterion)准则及 BIC(B-Information Criterion)准则是目前比较有效和应用较广泛的几种定阶方法。

2.1 FPE准则[1]

1971年，Akaike[1]提出了判定AR模型阶数的最小预测误差FPE准则。他在研究中发现，不论是缺参数拟合或超参数拟合，都会使预测误差的方差增大，即预测误差的方差是阶数n的下凹函数。并基于这个下凹函数，定义了如下的最终预测误差

$$\mathrm{FPE}(n)=\left(1+\frac{n}{L}\right)\left(1-\frac{n}{L}\right)\left[\phi(0)-\sum_{i=1}^{n}\hat{a}_i\phi(i)\right] \tag{3a}$$

其中，L为观测序列的记录长度，$\{\hat{a}_i\}$是n个拟合参数。

通常拟合的最高阶数$M(n)=\frac{1}{3}L\sim\frac{2}{3}L$。对$n=1,2,\cdots,M(n)$，逐个建立AR$(n)$模型并求出相应的FPE$(n)$值，若某个$n_0$使

$$\mathrm{FPE}(n_0)=\min_{1\leq n\leq M(n)}\{\mathrm{FPE}(n)\} \tag{3b}$$

成立，即n_0值对应下凹函数FPE(n)之最低点，则此n_0值为过程模型 AR(n) 在 FPE准则下的最佳阶数。

2.2 AIC 准则[2]

Akaike于1973年又提出了最小信息准则，即AIC准则。他曾成功地运用这一定阶方法控制水泥转窑温度。虽然所提出的AIC准则是针对AR模型，但这并不意味着AIC准则具有局限性。因为任何ARMA或MA模型均可以用无穷阶的AR模型来逼近，因而Akaike的AIC准则具有广泛而深刻的含义。

对于如(1)式的ARMA模型，AIC函数定义为

$$\mathrm{AIC}(n,m)=\log\hat{\sigma}_\varepsilon^2(n,m)+2(n+m+1)/L \tag{4a}$$

其中$\hat{\sigma}_\varepsilon^2(n,m)$是拟合ARMA$(n,m)$模型时的残差之方差，是阶$(n,m)$的函数．$(n+m+1)$是拟合参数个数，$L$是观测序列的记录长度。

显见，(4a)式中第一项是单调下降的(对阶(n,m)言)，而第二项是线性上升的。因此，阶(n,m)从$(0,0)$起开始增高时，AIC(n,m)先是呈下降趋势；当(n,m)增高至一定

值时，拟合残差$\hat{\sigma}_\varepsilon^2(n,m)$对AIC$(n,m)$的贡献甚小，此时参数个数$(n+m+1)$在AIC$(n,m)$函数中起决定作用，AIC$(n,m)$呈上升趋势。所以，AIC$(n,m)$是阶$(n,m)$的下凹函数。取AIC$(n,m)$值最小处对应的$(n,m)$值$(n_0,m_0)$为模型的最佳阶数，即满足

$$\mathrm{AIC}(n_0,m_0)=\min_{\substack{1\le n\le M(n)\\ 0\le m\le M(m)}}\{\mathrm{AIC}(n,m)\} \tag{4b}$$

的(n_0,m_0)值为AIC准则下的最佳模型阶数。

2.3 BIC 准则[3]，[4]

1978年，Akaike将AIC准则推广至BIC准则，BIC函数相应于模型(1)的定义为

$$\mathrm{BIC}(n,m)=\log\hat{\sigma}_\varepsilon^2(n,m)+(n+m+1)\log L/L \tag{5a}$$

与AIC定义不同的是：BIC定义中以$\log L$代替了AIC定义中的常数2。

可以看出，BIC(n,m)也是阶(n,m)的下凹函数。若有某个(n_0',m_0')使得

$$\mathrm{BIC}(n_0',m_0')=\min_{\substack{1\le n\le M(n)\\ 0\le M\le M(n)}}\{\mathrm{BIC}(n,m)\} \tag{5b}$$

成立，则该(n_0',m_0')值即为BIC准则下的模型最佳拟合阶数。

2.4 F-分析检验定阶法[5]

F-分析检验用于模型定阶是比较经典的方法。对(1)式的ARMA(N,M)模型，用过拟合的方法，先对观测数据用ARMA$(n,m)(n\geqslant N,m\geqslant M)$进行拟合；再假定某些高阶参数$a_{n-r},a_{n-r+1},\cdots,a_n$；$b_{m-s},b_{m-s+1},\cdots,b_m$取零值；检验两个模型ARMA$(n,m)$与ARMA$(n-r,\ m-s)$之间的差异是否显著，即进行如下的假设检验。

原假设 H_0：$a_{n-r}=a_{n-r+1}=\cdots=a_n=b_{m-s}=b_{m-s+1}=\cdots=b_m=0$

记Q_0为ARMA$(n,\ m)$模型的拟合残差平方和，Q_1是ARMA$(n-r,\ m-s)$模型的拟合残差平方和，则[6]

$$F=\left(\frac{Q_1-Q_0}{2}\right)\Big/\left(\frac{Q_0}{L-m-n}\right)\sim F(q,\ L-m-n) \tag{6}$$

其中，L为样本记录次数，$m+n$为模型参数个数，$q=s+r$为被检验参数个数。

对于给定的显著性水平α，若由(6)式求得的F值有$F\leqslant F_\alpha$，则H_0成立，$(n-r,\ m-s)$为模型的合适阶数；反之，模型的阶有上升的可能，可改变(r,s)值，继续检验。

2.5 小结

上面讨论的几种定阶策略，都是基于拟合残差信息来定阶的。除FPE准则仅适用于AR模型定阶外，其余AIC准则，BIC准则及F-分布检验均适用于ARMA模型定阶。一般认为，F-分布检验定阶适用于样本记录长度L较长，模型参数较多的离线处理情况，并且相应的计算量较大，约为P^3量级（P为拟合参数个数）。FPE准则，AIC准则及BIC准则特别适用于记录长度较短，要求快速实时处理的场合，借助于Toeplitz结构的参数估计的快速算法，FPE、AIC和BIC准则用于定阶处理的计算量可减少至$2p^2$量级[11]。需要指出的是，一般情况下$\log L\geqslant2$，因此，AIC函数达到极小值时对应的阶数(n_0,m_0)往往比BIC函数达到极小值时对应的阶数(n_0',m_0')高，即$n_0'\leqslant n_0,m_0'\leqslant m_0$。因此，对同一数据序列的拟合，用AIC准则往往比用BIC准则确定的阶数高。

此外，AIC及BIC准则函数的定义体现了对拟合残差与参数个数之间的综合考虑和

权衡。实质上，它体现了对真实模型拟合的精细程度与实时处理所能承担的计算量之间的综合考虑和权衡。例如，当要实现对拟合残差和参数个数之间的不同侧重考虑，以满足认识过程微细结构或实时处理的要求时，可以定义如下的BIC函数。

$$\mathrm{BIC}_c(n,m)=\log\hat{\sigma}_\varepsilon^2(n,m)+C(n+m+1)\log L/L \tag{7}$$

其中C为常数。当$C>1$时，体现了对拟合参数个数的侧重考虑，即此时的目的是辨识过程的大致结构及实现快速的实时处理；当$C<1$时，体现了对拟合残差的侧重考虑，此时的目的是要认识过程的精细结构。

理论研究表明[7]，用不同准则定出的最优模型，其渐近性能不同。当记录长度$L\to\infty$时，用AIC准则定出的阶数往往比真实阶高；而BIC准则确定的阶数往往与真实阶数相一致，即相容的。

但是，用于定阶的准则函数，如FPE、AIC、及BIC函数常常不是陡峭的下凹函数。在实际处理中准则函数值还伴有随机起伏。这样有可能造成准则函数达到某个数值，没有明显的变化趋势，而是随机地上下振荡，从而影响定阶的正确性和有效性。在小信噪比情况下FPE、AIC及BIC准则定阶有效性下降是这些定阶准则的主要缺陷。

3 基于自相关序列的几种定阶策略

利用自相关序列中所包含的关于模型的阶信息来构造定阶策略是很有意义的。因为这类定阶方法往往导致在定阶的同时估计拟合参数，因此定阶处理不会增加太多的计算量，便于满足实时处理的要求。

对于(1)式所示的ARMA(N,M)模型及(2)所定义自相关序列$\{\phi(n)\}$，有如下的修正Yule—Walker方程[8]：

$$\phi(p)+\sum_{i=1}^{N}a_i\phi(p-i)=0,\ p=M+1,\ M+2,\ \cdots,\ N,\ N+1,\ \cdots \tag{8}$$

在(8)式中取$p\geqslant N$的前p'个方程，构造如下的矢量方程组：

$$\vec{\phi}(p)+\sum_{i=1}^{N}a_i\vec{\phi}(p-i)=0,\ p'\geqslant N \tag{9}$$

其中$p=N,\ N+1,\ \cdots,\ N+p'$；$\vec{\phi}(p)\triangleq[\phi(p)\ \ \phi(p-1)\ \ \cdots\ \ \phi(p-N)]^T$。由(9)式易知，$\vec{\phi}(p)$可以由矢量集$\{\vec{\phi}(p)\}$中的前$N$个矢量线性表示如下

$$\vec{\phi}(p)=-\sum_{i=1}^{N}a_i\vec{\phi}(p-i) \tag{10}$$

这就是说，矢量集$\{\vec{\phi}(p)\}$中有且仅有N个线性无关矢量，或者说在p'维的线性空间中，存在一个N维的子空间，它有且仅有N个正交基。这从一个侧面证明了过程自相关序列$\{\phi(n)\}$中的确包含了有关模型阶的信息。

下面将讨论几种基于修正Yule—Walker方程(8)式的定阶策略。

3.1 Gram—Schimidt正交法[9]

由于矢量集$\{\vec{\phi}(p)\}$中仅有N个正交矢量，应用Gram—Schimidt正交化方法将$\{\vec{\phi}(p)\}$正交化，正交化后相应矢量为$\{\vec{\phi}_r(p)\}$。显见，如果$\{\vec{\phi}_r(p)\}$中元素个数超过N个时，则理论上讲必有零元素，这样，让N从1起取值，每次递加1，记为$n=1,2,\cdots$；p'取为n。每次正交化后，检查$\{\vec{\phi}_r(p)\}$中矢量的模值$\|\vec{\phi}_r(p)\|$，一旦有某个最小的n

值，使得$\|\vec{\phi}_r(p)\|=0$（考虑到实际情况，如计算机字长效应等应为$\|\vec{\phi}_r(p)\|\leqslant\delta$，$\delta$为适当门限值），则判定此$n$值为所求的$N$值，即阶。在实际处理中，若只知道自相关序列$\phi(n)$的估计$\hat{\phi}(n)$，此时可以用一个适当门限值$\delta$（$\delta>0$为一个小正数）去检测$\|\vec{\phi}_r(p)\|$在$p=2N$处的一个陡降。此时，定阶策略可以写为

$$\{N=n,\ n=\min\{n:\ \|\vec{\phi}_r(2n)\|<\delta\}\} \tag{11}$$

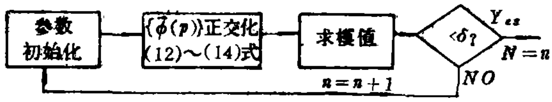

图 2　Gram—Schimidt 正交法定阶

Gram—Schimidt 算法应用的具体形式为

$$\hat{\phi}_r(n)=\hat{\phi}(n) \tag{12}$$

$$\hat{\phi}_r(l)=-\beta_{ln}\hat{\phi}_r(n)-\beta_{ln+1}\hat{\phi}_r(n+1)-\cdots-\beta_{ll-1}\hat{\phi}_r(l-1)+\hat{\phi}(l-1) \tag{13}$$

$$\beta_{ls}=[\hat{\phi}^T(l)\cdot\hat{\phi}_r(s)]/[\hat{\phi}_r^T(s)\cdot\hat{\phi}_r(s)] \tag{14}$$

其中　$n\leqslant s<l\leqslant 2n$.

3.2 递归求逆法[10]

在(8)式中取$p=N,N+1,\cdots,2N-1$共N个方程组成如下的关于a_i的线性方程组

$$\sum_{i=1}^{N}a_i\phi(p-i)=-\phi(p),\quad p=N,N+1,\cdots,2N-1 \tag{15}$$

上式可写为如下的矩阵形式

$$R_N\cdot\vec{a}_N^*=-\vec{r}_N \tag{16}$$

其中$\vec{a}_N^*=(a_N\ a_{N-1}\ \cdots\ a_1)^T$，$\vec{r}_N=(\phi(2N-1)\ \ \phi(2N-2)\ \cdots\ \phi(N))^T$

$$R_N=\begin{bmatrix}\phi(0) & \phi(1) & \cdots & \phi(N-1)\\ \phi(1) & \phi(2) & \cdots & \phi(N)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \phi(N-1) & \phi(N) & \cdots & \phi(2N-2)\end{bmatrix}_{N\times N} \tag{17}$$

对于(16)式，有如下的递归解法

$$\vec{a}_n^*=-R_n^{-1}\cdot\vec{r}_n \tag{18}$$

$$R_{n+1}^{-1}=\begin{bmatrix}R_n^{-1}+\sigma_n^{-1}\vec{a}_n^*\cdot\vec{a}_n^{*T} & \sigma_n^{-1}\vec{a}_n^*\\ \sigma_n^{-1}\vec{a}_n^{*T} & \sigma_n^{-1}\end{bmatrix} \tag{19}$$

$$\sigma_n=r_{nn}+\vec{a}_n^{*T}\cdot\vec{r}_n=\det(R_{n+1})/\det(R_n) \tag{20}$$

其中$r_{nn}\triangleq\phi(2n-1)$，而

$$R_{n+1}\triangleq\left[\begin{array}{c|c}R_n & \vec{r}_n\\ \hline \vec{r}_n^T & r_{nn}\end{array}\right] \tag{21}$$

对于(19)式，当$n=N$时，$\vec{a}_n^*$恰好为所求拟合参数$\vec{a}_N$的倒序。此时，由修正的 Yule—Walker方程(8)式，有

$$\sigma_N=r_{NN}+\vec{a}_N^{*T}\cdot\vec{r}_N=\sum_{i=0}^{N}a_i\phi(N-i)=0 \tag{22}$$

根据(22)式，有如下的基于递归求逆法的定阶策略

$$\{N=n,\ n=\min[n;\ \sigma_n=0]\} \tag{23a}$$

如果已知的是过程自相关序列$\phi(n)$的估计$\hat{\phi}(n)$，则上述定阶策略可以修正为

$$\{N=n,\ n=\min[n;\ |\sigma_n|<\delta]\} \tag{23b}$$

其中$\delta>0$为一适当门限值。

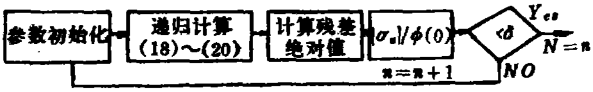

图 3 递归求逆法定阶

3.3 快速的G·Carayannis 递归法[11]

在前面的递归求逆定阶策略中，R_N阵的托布利兹（Toeplitz）性质没有得到充分利用。下面，我们给出利用高效的G·Carayannis非对称Toeplitz阵递归算法来构造的定阶策略。

对于如下式的Toeplitz结构的线性方程组

$$P_N\cdot\vec{a}_N=-\vec{p}_N \tag{24}$$

其中$\vec{p}_N=[\phi(N+2)\ \ \phi(N+3)\cdots\phi(2N+1)]^T$，$\vec{a}_N=(a_1\ \ a_2\ \ \cdots\ \ a_N)^T$，

$$P_N=\begin{bmatrix}\phi(N+1) & \phi(N) & \cdots & \phi(2)\\ \phi(N+2) & \phi(N+1) & \cdots & \phi(3)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \phi(2N) & \phi(2N-1) & \cdots & \phi(N+1)\end{bmatrix}_{N\times N} \tag{25}$$

再构造如下一个辅助方程

$$Q_N\cdot\vec{C}_N=-\vec{q}_N \tag{26}$$

其中$\vec{q}_N=[\phi(N)\ \ \phi(N-1)\ \ \cdots\ \ \phi(1)]^T$，$\vec{C}_N=(C_1\ \ C_2\ \ \cdots\ \ C_N)^T$

$$Q_N=\begin{bmatrix}\phi(N+1) & \phi(N+2) & \cdots & \phi(2N)\\ \phi(N) & \phi(N+1) & \cdots & \phi(2N-1)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \phi(2) & \phi(3) & \cdots & \phi(N+1)\end{bmatrix}_{N\times N} \tag{27}$$

求解(24)式的快速递归算法用于我们目的的具体形式如下

$$\vec{a}_{K+1}=\begin{bmatrix}\vec{a}_K\\ 0\end{bmatrix}-\beta_K/\alpha_K\cdot\begin{bmatrix}J_K\vec{C}_K\\ 1\end{bmatrix} \tag{28}$$

$$\vec{C}_{K+1}=\begin{bmatrix}\vec{C}_K\\ 0\end{bmatrix}-\beta_K^*/\alpha_K\cdot\begin{bmatrix}J_K\vec{a}_K\\ 1\end{bmatrix} \tag{29}$$

$$\beta_K=\phi(n+K+2)+\sum_{i=1}^{K}a_{K-i+1}\phi(n+1+i) \tag{30}$$

$$\beta_K^*=\phi(n-K)+\sum_{i=1}^{K}C_{K-i+1}\phi(n+1-i) \tag{31}$$

$$\alpha_K=\alpha_{K-1}-\beta_{K-1}\cdot\beta_{K-1}^*/\alpha_{K-1} \tag{32}$$

起始条件为$a_1=-\phi(n+2)/\phi(n+1)$，$C_1=-\phi(n)/\phi(n+1)$，$\beta_0=\phi(n+2)$，$\beta_0^*=\phi(n)$，$\alpha_0=\phi(n+1)$。

在上述递归算法中，让N从1开始取值，每次递加1，记为$n=1,2,\cdots$。令

$$\sigma_n=\beta_n+\beta_n^* \tag{33}$$

易知，当$n=N$时，有

$$\sigma_N=\beta_N+\beta_N^*=\left[\phi(2N+2)+\sum_{i=1}^{N}a_{N-i+1}\phi(N+1+i)\right]$$
$$+\left[\phi(0)+\sum_{i=1}^{N}C_{N-i+1}\phi(N+1-i)\right] \tag{34}$$

上式中第一项相应于(8)式$p=2N+2$时的情形，故等于零。由后向线性预测方程，知上式第二项亦为零，故$\sigma_N=0+0=0$。据此，可以构造如下的定阶策略

$$\{N=n,\ n=\min[n:\ |\sigma_n|=0]\} \tag{35a}$$

如果仅知道过程自相关序列的估计$\hat{\phi}(n)$，那么，上述定阶策略可修正如下

$$\{N=n,\ n=\min\{n:\ |\sigma_n|<\delta\}\} \tag{35b}$$

其中，δ是一个适当的门限值。一般地，$|\sigma_n|$值在$n=N$处有一个陡降。

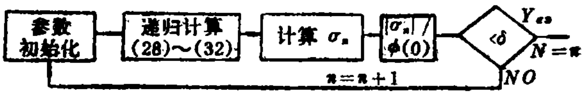

图 4　G.Carayannis 快速递归法定阶

3.4　奇异值分解(SVD)法[12]

设过程自相关序列$\{\phi(n)\}$的估计序列$\{\hat{\phi}(n)\}$（有限长度），相应的估计自相关矩阵为

$$\hat{T}_n=\begin{bmatrix}\hat{\phi}(n) & \hat{\phi}(n-1) & \cdots & \hat{\phi}(1)\\ \hat{\phi}(n+1) & \hat{\phi}(n) & \cdots & \hat{\phi}(2)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \hat{\phi}(2n-1) & \hat{\phi}(2n-2) & \cdots & \hat{\phi}(n)\end{bmatrix}_{n\times n} \tag{36}$$

其中$n\geqslant N$。对$\hat{T}_n$进行奇异值分解

$$(\hat{T}_n^T\cdot\hat{T}_n)=A_n^T\cdot\Lambda_n\cdot A_n \tag{37a}$$
$$(\hat{T}_n\cdot\hat{T}_n^T)=B_n^T\cdot\Lambda_n\cdot B_n \tag{37b}$$

其中$\Lambda_n=\text{diag}(\lambda_i)_{n\times n}$，$i=1,2,\cdots,n$。$A_n$及$B_n$是正交阵，分别由$\hat{T}_n^T\cdot\hat{T}_n$及$\hat{T}_n\cdot\hat{T}_n^T$的特征矢量构成，$\lambda_i$是相应的特征值，那么

$$\hat{T}_n=A_n\cdot\Lambda^{\frac{1}{2}}B_n^T \tag{38}$$

考虑到$\text{Rank}(T_n)=N$，所以当$n>N$时，若将全部特征值的绝对值$|\lambda_i|$按大小顺序排列后，将发现最后的几个$|\lambda_i|$很小。于是，有如下的定阶策略

$$\left\{N=K,\ K=\min\left[K:\ K=\sum_{i=1}^{n}\text{sign}(|\lambda_i|)\right]\right\} \tag{39}$$

其中

$$\text{sign}(|\lambda_i|)=\begin{cases}1, & \left|\dfrac{\lambda_i}{\lambda_1}\right|>\delta\\ 0, & \left|\dfrac{\lambda_i}{\lambda_1}\right|<\delta\end{cases} \tag{40}$$

δ是一个适当门限值，λ_i除以λ_1是让λ_i对绝对值最大之特征值归一化。

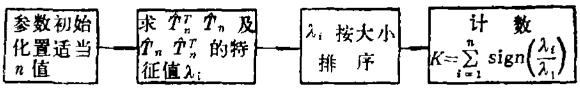

图 5 SVD法定阶

3.5 小结

上面讨论的几种定阶策略，都是基于过程自相关序列来定阶的，均可用于ARMA模型定阶。计算量以SVD法最大，因为在求特征值时，往往要解一个高阶代数方程；其次是Gram—Schimidt正交法，约为N^3量级；再其次是递归求逆法，约为$\frac{1}{6}N^3$量级；G·Carayannis递归法计算量最小，约为$2N^2$量级。递归求逆法及G·Carayannis递归法可以在定阶处理的同时估计出拟合参数，所以便于实现快速的实时处理。但是，Gram—Schimidt正交法，递归求逆法及G·Carayannis递归法定阶在小信噪比(SNR)情况下，定阶的有效性往往大为下降。此时，一个重要原因就是过程自相关矩阵（或协方差矩阵，在零均值条件下同）呈现病态，不再是正定的相对前面几种定阶策略，SVD法定阶在小SNR条件下有效性下降缓慢（见后面的仿真结果）。

4 几种定阶策略的仿真结果

考虑如下一个ARMA(4,3)过程

$$x(n)+\sum_{i=1}^{4}a_i x(n-i)=\sum_{i=0}^{3}b_i w(n-i) \tag{41}$$

其中$b_0=a_0=1$，$a_1=-1.052$，$a_2=0.1071$，$a_3=0.5371$，$a_4=-0.53$，$b_1=0.90$，$b_2=0.36$，$b_3=0.054$。

仿真中$w(n)$是一个零均值，单位方差的白色高斯序列，观测方程

$$y(n)=x(n)+v(n) \tag{42}$$

我们共观测了L个样本，观测噪声$v(n)$是零均值的白高斯序列，方差为σ_0^2，且$\{v(n)\}$与$\{w(n)\}$互相独立。定义观测方程右边的信噪比为

$$\mathrm{SNR}=-10\lg(\sigma_0^2/\sigma_x^2) \tag{43}$$

实际计算中，σ_x^2以$\hat{\sigma}_x^2=\frac{1}{L}\sum_{k=0}^{L-1}x^2(k)$代替。由于观测噪声的存在，过程$x(n)$的自相关序列的估计由下式给出

$$\hat{\phi}(n)=\frac{1}{L}\sum_{k=0}^{L-|n|-1}y(k)y(k+n) \tag{44}$$

下面的表1～4是不同SNR条件下，Gram—Schimidt定阶法，递归求逆法，G·Carayannis递归法及SVD法定阶的正确率。可以看到：

(1) 在较大SNR(>-5dB)条件下，四种定阶策略均是有效的(80%～89%)；

(2) 在小SNR(<-10dB)条件下，除SVD法仍有85%左右的有效性外，其余三种定阶法有效性均有明显下降。

表 1

SNR(dB)	10	0	-5	-10
判阶正确率	98%	90%	80%	69%

Gram—Schimidt 正交化法判阶

表 2

SNR(dB)	10	0	-5	-10
判阶正确率	99%	89%	81%	70%

递归求逆法判阶

表 3

SNR(dB)	10	0	-5	-10
判阶正确率	98%	90%	82%	70%

G.Carayannis 递归法判阶

表 4

SNR(dB)	10	0	-5	-10
判阶正确率	98%	95%	89%	85%

SVD 法判阶

5 结　语

模型的定阶是时间序列分析各分支研究领域中经常遇到的重要课题。Akaike的研究工作是有启发意义的。为了提高定阶策略的有效性，就应该从综合角度及客观需要去考虑定阶问题。现有的定阶策略大多对信噪比比较敏感，因此，在小SNR情况，这些定阶策略有效性往往急剧下降，所以，寻找一个对信噪比不敏感的模型定阶准则函数（或度量量）是今后的研究方向。最后，我们再次强调指出，在许多场合，模型的定阶问题不是由性能指标决定，而是取决于实时处理所能承担的计算量（拟合参数个数不能太多，即阶数不能太高）及客观需要(离线处理时高阶参数 模型对 认识过程 精细 结构有利)。

参 考 文 献

[1] H.Akaike. AR Model fitting for control. Ann. Inst. Statist. Math. 1971. 23: 163～180

[2] H.Akaike. Fitting autoregressive models for prediction. Ann. Inst. Statist. Math., 1969;21: 243～247

[8] H. Akaike. A Bayeian analysis of the minimum AIC procedure. Ann. Inst. Statist. Math., 1978;30A: 9～14

[4] H.Akaike. A Bayesian extension of the minimum AIC procedure of autoregressive model fitting. Biometrika, 1979;66: 237～242

[5] M. B. Priestley. Spectral Analysis and Time Series. London, 1981

[6] 张尧庭，方开泰. 多元统计分析引论. 北京科学出版社，1982

[7] 顾岚，安鸿志. 自回归模型的精细结构与统计分析. 应用数学学报，1985 8(4): 433～445

[8] B. Friedlander and B. Porat. The modified Yule—Walker Method of ARMA spectral estimation. IEEE Trans. AES, 1984;20: 158～171

[9] K.Hoffman, and R.Kunze. Linear Algebra, Prentice Hall. Englewood cliffs, N.J.1965

[10] G. Carayannis. An alternative formulation for the recursive solution of the

covariance and autocorrelation equations. IEEE Trans. Assp, 1977;25; 574～577

[11] G.Carayannis. N.Kalouptsidis, and D.G. Manolakis. Fast recursive algorithms for a class of linear equations. IEEE Trans. Assp, 1982; 30: 227～239

[12] R.Bellman. Introduction to matrix analysis. Mc-Graw—Hill Book Co., New York: 1960

Rules of Judging Models for Time Series Analysis

Lü Rui

Abstract

Judging model's order is an important problem in time series analysis (such as parameter spectral estimation, system identification, regressive analysis). This paper discusses and analyses several ways to judge model's order which have been developed. At the same time it point out their usage, and compares them with each other.

key words: Time series analysis, Spectral estimation, System identification, Modeling, Judging order

Some Atomic and Molecular Problems in Studing of Interstellar Space

Zhou Maotang

Abstract

The eight atomic and molecular problems in studing of interstellar space are recommended:

1. Observation about interstellar molecules
2. Formation about interstellar molecules
3. Atomic collisions
4. Atoms in highly excited states
3. Ionization problems
6. Broadening about spectra
7. Oscillator strength
8. Interstellar Maser

Key words: Space physics, Interstellar molecules, Interstellar atoms