国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第11卷第1期 1989年3月 Vol.11.No.1

相依目标群系统火力分配问题分析与解法*

张干宗 严小颖
（系统工程与数学系）

摘要 本文中讨论由若干个相依目标群组成的平面点目标系统的火力分配问题。对于武器型号相同的情形，得到了“边际毁伤递减原理”和“循序最优方案即全局最优方案”等结论，并在此基础上提出了问题的解算方法。对于武器型号不同的情形，提出了“循序最优枚举法”，并得出有关结论。

关键词 运筹学，毁伤，最优；相依目标群，火力分配问题
分类号 O22，O29

引 言

核武器是一种大规模杀伤武器。一个100万吨级的核弹地面爆炸，在距爆心8公里以内，二、三类建筑都被严重破坏。如以适当比高空爆，其破坏半径还可扩大百分之五十。一般认为，当毁伤半径大于目标半径五倍以上，该目标即可视为点目标。所以，一个城市中的重点目标或某种工业系统的重点目标，在大当量核弹攻击之下，可视为点目标，并且有若干点目标是毁伤相依的。因此，考虑对一组城市或对某种工业系统（如电力系统、石油系统、冶金系统等）的打击方案时，便会提出由若干个毁伤相依目标群所组成的平面点目标系统的火力分配问题。本文针对这种目标系统，建立火力分配模型，并讨论其特性与解法。

1 有关概念

在一枚核弹的攻击下，如果两个点目标有可能同时被毁伤，则称这两个点目标毁伤相依（或简称相依）；否则，称为不相依。如按毁伤半径（或称破坏半径）和毁伤圆（以点目标为圆心以毁伤半径为半径的圆域）的观点来描述，两个点目标相依当且仅当二者的毁伤圆相交。这里说的“毁伤”是指目标受到指定程度的破坏。

对于一组点目标$\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$，如果任取其中两个点目标$A_i$，$A_j$，都存在该组中的若干点目标$A_{i_1}, \cdots, A_{i_k}$，使目标串$A_i, A_{i_1}, \cdots A_{i_k}, A_j$依次相依，则称这一组点目标为一相依目标群。下面要考虑的是由若干个相依目标群组成的平面点目标系（简称为相依目标群系统），其中任意两个相依目标群之间没有毁伤相依关系。即指一个相依目标群中的任一点目标都不与另一相依目标群中的任一点目标相依。

一个相依目标群在一枚核弹的攻击下，各点目标的毁伤概率除与核弹的当量和精度

1988年5月3日收稿

有关外，还与瞄准点的选取有关。在多弹攻击的情形，为避免重复杀伤，各弹的瞄准点不应完全一致。从实际情况考虑，可以根据各相依目标群中点目标的位置状况，对每一相依目标群确定出几个可采用的瞄准点方案。

点目标毁伤概率的计算取决于毁伤函数$d(x, y)$的选取，$d(x, y)$表示弹着点（或爆心投影点）为(x,y)时点目标被毁伤的概率。毁伤函数有多种形式（见[1]），要根据目标的具体性质来选取。最常用的毁伤函数有两种，一种叫做 0-1 杀伤律，另一种叫扩散高斯杀伤律。现假定采用0—1杀伤律，即

$$d(x, y)=\begin{cases}1, & (x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2;\\ 0, & (x-a)^2+(y-b)^2>R^2\end{cases} \tag{1}$$

其中，(a, b)为点目标的平面直角坐标，(x, y)是弹着点（或爆心投影点）的坐标，R是毁伤半径，它随目标类型和武器型号而定。

不考虑发射的系统误差，设弹着点（或爆心投影点）的坐标服从二维圆正态分布，即具有如下的概率密度函数：

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left[\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{2}$$

其中，(x_0, y_0)是瞄准点坐标，σ是射击散布的标准偏差（或称均方差），则点目标的毁伤概率（指单弹攻击下的毁伤概率）为

$$P=\iint_{-\infty}^{+\infty} d(x,y)f(x,y)dxdy \tag{3}$$

将(1)和(2)代入(3)，即可导出点目标毁伤概率的计算公式：

$$P=\frac{1}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\int_0^R \rho e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{r\rho}{\sigma^2}\right)d\rho \tag{4}$$

其中，r为瞄准点与点目标的距离，$I_0(\cdot)$为第一类变态零阶贝塞尔函数。上述公式已有算表可查。

2 相依目标羣系统的火力分配模型

今设相依目标群系统由M个相依目标群组成，第m个相依目标群（或简称目标群m）由n_m个点目标组成，该目标群的瞄准点选取方案有g_m个（$m=1, \cdots, M$）。对该系统计划施行K枚弹的攻击。对这K枚弹根据当量和精度的不同而分类，设共分L个类型。设第l型弹的枚数为K_l($l=1,\cdots,L$)。用v_{mi}表示第m个相依目标群中第i个点目标被毁伤时的损失价值。用$P_{mi}(l,j)$表示目标群m受到一枚l型弹按第j个瞄准点方案攻击时其第i个点目标的毁伤概率。用x_{mlj}表示对目标群m使用l型弹并按第j个瞄准点方案攻击的弹数，这一组数是火力分配问题的决策变量。假设各弹的发射是相互独立的，且不考虑毁伤积累，则在上述方案的打击下，目标群m中第i个点目标被毁伤的概率为

$$1-\prod_{l=1}^{L}\prod_{j=1}^{g_m}(1-P_{mi}(l,j))^{x_{mlj}} \tag{5}$$

目标群m的平均毁伤值为

$$W_m=\sum_{i=1}^{n_m}\left[1-\prod_{l=1}^{L}\prod_{j=1}^{g_m}(1-P_{mi}(l,j))^{x_{mlj}}\right]v_{mi} \tag{6}$$

记

$$V_m=\sum_{i=1}^{n_m}\prod_{l=1}^{L}\prod_{j=1}^{g_m}(1-P_{mi}(l,\ j))^{x_{mlj}}\ v_{mi} \tag{7}$$

称V_m为目标群m的平均剩余值。于是整个相依目标群系统的平均毁伤值为

$$W=\sum_{m=1}^{N}\sum_{i=1}^{n_m}\left[1-\prod_{l=1}^{L}\sum_{j=1}^{g_m}(1-P_{mi}(l,\ j))^{x_{mlj}}\right]v_{mi} \tag{8}$$

此W即可作为对相依目标群系统的打击效果评定指标。记

$$V=\sum_{m=1}^{M}V_m=\sum_{m=1}^{M}\sum_{i=1}^{n_m}\prod_{l=1}^{L}\prod_{j=1}^{g_m}(1-P_{mi}(l,\ j))^{x_{mlj}}\ v_{mi} \tag{9}$$

称V为该系统的平均剩余值。并记

$$U=\sum_{m=1}^{M}\sum_{i=1}^{n_m}v_{mi} \tag{10}$$

由$W=U-V$，而U是一个常数，可知求解$\max W$等价于求解$\min V$。于是相依目标群系统的火力分配模型可表达为：

$$\min V(\{x_{mlj}\})=\sum_{m=1}^{M}\sum_{i=1}^{n_m}\prod_{l=1}^{L}\prod_{j=1}^{g_m}(1-P_{mi}(l,j))^{x_{mlj}}\ v_{mi} \tag{11}$$

$$s.t.\quad \sum_{m=1}^{M}\sum_{j=1}^{g_m}x_{mlj}=K_l(l=1,\cdots,L) \tag{12}$$

$$x_{mlj}\geqslant 0\ \text{且为整数}\begin{pmatrix} m=1,\cdots,M; \\ l=1,\cdots,L; \\ j=1,\cdots,g_m \end{pmatrix} \tag{13}$$

这是一个具有非线性目标函数和线性约束条件的整数规划模型。去掉整数限制的对应松弛问题是一个凸规划问题。对于这种模型常规的求解方法是分枝定界法（见[2]），但一般说来计算量很大。下面针对一些特殊情况提出一些简便的特殊解法。

3　火力分配模型的求解方法

先来考虑如下情形：假定对相依目标群系统所使用的武器是同一类型的，并假定对相依目标群施行多弹攻击时瞄准点不变。这一假定在系统规模较小、武器精度不高或对各相依目标群的投弹量都很小的情况下是现实的。这时火力分配模型简化为：

$$\min V(\{x_m\})=\sum_{m=1}^{M}\sum_{i=1}^{n_m}(1-P_{mi})^{x_m}v_{mi} \tag{14}$$

$$s.t.\quad \sum_{m=1}^{M}x_m=K \tag{15}$$

$$x_m\geqslant 0\text{且为整数}\ (m=1,\cdots,M) \tag{16}$$

其中，x_m为分配给目标群m的投弹量，P_{mi}为目标群m受击一发时其第i个点目标的毁伤概率。下面我们对这一模型提出一个简便的求解方法。为此先要建立有关概念和结论。

边际毁伤值　向目标群m发射的第k发弹所新生成的平均毁伤值（不包括此弹之前的平均毁伤值）称为目标群m在第k发弹的边际毁伤值，记为$B(m,k)$。

定理 1　对于模型(14)～(16)所表达的情形，相依目标群的边际毁伤值随受击弹数的增加而减小。即对于$k\geqslant 1$和任一$m\in\{1,\cdots,M\}$，有下列不等式成立：

$$B(m,\ k+1)\leqslant B(m,\ k) \tag{17}$$

证明　由边际毁伤值的定义可知

$$B(m,\ k)=V_m(k-1)-V_m(k)\qquad (k\geqslant 1)$$

由此可得

$$B(m,\ k)=\sum_{i=1}^{n_m}P_{mi}(1-P_{mi})^{k-1}v_{mi} \tag{18}$$

同理可得

$$B(m,\ k+1)=\sum_{i=1}^{n_m}P_{mi}(1-P_{mi})^{k}v_{mi}$$

再由$0\leqslant 1-P_{mi}\leqslant 1$（$m=1,\ \cdots,\ M;\ i=1,\ \cdots,\ n_m$）即可得知

$$B(m,\ k+1)\leqslant B(m,\ k)\qquad (m=1,\ \cdots,\ M;\ k\geqslant 1)$$ （证毕）

定理 1 表明了边际毁伤值递减的原理，正是这一原理决定了模型(14)～(16)存在着特殊解法。

在文[3]中，对离散不相依目标系的火力分配问题提出了循序最优配置方案。现在把这一概念推广到相依目标群系统的情形。

循序最优方案　对相依目标群系统依次发射K发弹，每发弹都射向边际毁伤值最大的目标群。具体地说，第 1 发弹射向目标群m_1，使得

$$B(m_1,\ 1)=\max\{B(m,\ 1):\ m=1,\ \cdots,\ M\};$$

当已发射$k(<K)$发弹，设$k_1,\ \cdots,\ k_M$分别为射向目标群$1,\ \cdots,\ M$的弹数($k_1+\cdots+k_M=k$)，则第$k+1$发弹射向目标群m_{k+1}，使得

$$B(m_{k+1},\ k_{m_{k+1}}+1)=\max\{B(m,\ k_m+1):\ m=1,\ \cdots,\ M\} \tag{19}$$

按此法得出的火力分配方案称为循序最优方案。

定理 2　对于本节所述的相依目标群系统，循序最优方案必为火力分配模型(14)～(16)的最优解。

证明　对K用数学归纳法。当$K=1$时，结论显然成立。设$K=l$时结论成立。下设模型(14)～(16)中的$K=l+1$，并设$(x_1^*,\ \cdots,\ x_M^*)$是该模型的最优解，$(x_1',\ \cdots,\ x_M')$是循序最优方案。如果

$$(x_1',\ \cdots,\ x_M')\neq(x_1^*,\ \cdots,\ x_M^*)$$

则由

$$x_1'+\cdots+x_M'=K=x_1^*+\cdots+x_M^*$$

可知，必存在$m_0\in\{1,\cdots,M\}$，使$x_{m_0}^*>x_{m_0}'$。因$x_{m_0}^*$和x_{m_0}'都是整数，即知

$$x_{m_0}^*\geqslant x_{m_0}'+1 \tag{20}$$

设循序最优方案中第$l+1$发弹是射向目标群m_{l+1}的，则由循序最优方案的定义可知，$(x_1',\ \cdots,\ x_{m_{l+1}}'-1,\ \cdots,\ x_M')$是$K=l$时的循序最优方案。且知

$$B(m_{l+1},\ x'_{m_{l+1}})\geqslant B(m_0,\ x'_{m_0}+1)$$

由式(20)和定理 1 可知

$$B(m_0,\ x'_{m_0}+1)\geqslant B(m_0,\ x^*_{m_0})$$

从而有

$$B(m_{l+1},\ x'_{m_{l+1}})\geqslant B(m_0,\ x^*_{m_0}) \tag{21}$$

由归纳法假设知，$(x'_1,\ \cdots,\ x'_{m_{l+1}}-1,\ \cdots,\ x'_M)$ 是$K=l$时模型(14)～(16)的最优解。因此有

$$\sum_{\substack{m=1\\m\neq m_{l+1}}}^{M}\sum_{i=1}^{n_m}(1-P_{mi})^{x'_m}v_{mi}+\sum_{i=1}^{n_{m_{l+1}}}(1-P_{m_{l+1}i})^{x'_{m_{l+1}}-1}v_{m_{l+1}i}$$

$$\leqslant\sum_{\substack{m=1\\m\neq m_0}}^{M}\sum_{i=1}^{n_m}(1-P_{mi})^{x^*_m}v_{mi}+\sum_{i=1}^{n_{m_0}}(1-P_{m_0i})^{x^*_{m_0}-1}v_{m_0i}$$

从而有

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{i=1}^{n_m}(1-P_{mi})^{x'_m}v_{mi}+B(m_{l+1},\ x'_{m_{l+1}})$$

$$\leqslant\sum_{m=1}^{M}\sum_{i=1}^{n_m}(1-P_{mi})^{x^*_m}v_{mi}+B(m_0,\ x^*_{m0})$$

再由式(22)，即得

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{i=1}^{n_m}(1-P_{mi})^{x'_m}v_{mi}\leqslant\sum_{m=1}^{M}\sum_{i=1}^{n_m}(1-P_{mi})^{x^*_m}v_{mi}$$

由此可知，当$K=l+1$时，循序最优方案也是模型(14)～(16)的最优解。　（证毕）

定理 2 表明，寻求模型(14)～(16)的最优解，只要求出循序最优方案即可。对各相依目标群，按公式(4)计算出各点目标的毁伤概率 P_{mi} 后，再按下述步骤即可求出循序最优方案。

循序最优方案解算步骤：

(1) 输入数据 K，M，$n_m(m=1,\cdots,M)$，v_{mi} 和 $P_{mi}(m=1,\ \cdots,\ M;\ i=1,\ \cdots,\ n_m)$。并置

$$x_m:=0,\ k_m:=0\quad(m=1,\ \cdots,\ M)$$

(2) 计算$B(m,\ k_m+1)=\sum_{i=1}^{n_m}P_{mi}(1-P_{mi})^{k_m}v_{mi}\quad(m=1,\ \cdots,\ M)$。

(3) 比较$B(m,\ k_m+1)$，得出

$$B(m_0,\ k_{m_0}+1)=\max\{B(m,\ k_m+1):m=1,\ \cdots,\ M\}$$

并置$x_{m_0}:=x_{m_0}+1$，$k_{m_0}:=k_{m_0}+1$。

(4) 若$\sum_{m=1}^{M}x_m<K$，返回(2)（这时只需重新计算$B(m_0,k_{m_0}+1)$，其余$B(m,\ k_m+1)$与前一循环相同）；若$\sum_{m=1}^{M}x_m=K$，计算结束，输出$(x_1,\ \cdots,\ x_m)$，即为循序最优方

案。

对于一般情形下的火力分配问题，也可相应地建立循序最优方案的概念，但这时循序最优方案不一定是问题的最优解。下举一例来说明。

例　在模型(11)～(13)中，设$K=4$，$L=2$，$K_1=K_2=2$，即有两种类型的弹，分别称为1型弹和2型弹，每型弹各2枚。设$M=2$，$n_1=n_2=1$，$g_1=g_2=1$，即目标系统由两个不相依的点目标组成，分别称为1号目标和2号目标。设1、2号目标的毁伤价值为$v_1=v_2=1$. 设1型弹毁伤1，2号目标的概率分别为$P_1(1)=0.9$，$P_2(1)=0.7$；2型弹毁伤1，2号目标的概率分别为$P_1(2)=0.7$，$P_2(2)=0.65$. 这时可以算出循序最优方案为：

第一发用1型弹射向1号目标,边阵毁伤值为0.9；第二发用1型弹射向2号目标，边际毁伤值为0.7；第三发用2型弹射向2号目标，边际毁伤值为0.195；第四发用2型弹射向1号目标，边际毁伤值为0.07. 按此方案的总平均毁伤值为1.865，总平均剩余值为0.135.

若采用如下分配方案：两发1型弹均射向1号目标，两发2型弹均射向2号目标，则可算出总平均剩余值为

$$(1-P_1(1))^2(1-P_1(2))^0+(1-P_2(1))^0(1-P_2(2))^2=0.1325$$

可见，此方案优于循序最优方案。

上例说明，当武器的类型不同时，对火力分配模型必须寻求另外的解法。

现在考虑如下情形：武器类型不同，但只有两类，即$L=2$. 设1型弹有K_1枚，2型弹有K_2枚，其他条件与前述特殊情形相同。这时火力分配模型为：

$$\min V=\sum_{m=1}^{M}\sum_{i=1}^{n_m}(1-P_{mi}(1))^{x_{m1}}(1-P_{mi}(2))^{x_{m2}}v_{mi} \tag{22}$$

$$s.t.\quad \sum_{m=1}^{M}x_{ml}=K_l\qquad(l=1,2) \tag{23}$$

$$x_{m1},\ x_{m2}\geqslant 0\ \text{且为整数}(m=1,\cdots,M) \tag{24}$$

对于这种模型，假如1型弹的所有分配方案可以排列出来（这在M和K_1较小的情况下是现实的），则可采用如下的特殊解法。

循序最优枚举法：

(1) 将1型弹的所有分配方案（其总数为$t=C_{M-1}^{K_1+M-1}$）按某种顺序排列，记为

$$(x_{11}^{(k)},\ x_{21}^{(k)},\ \cdots,\ x_{M1}^{(k)}),\ k=1,\ \cdots,\ t$$

(2) 在1型弹取第k方案的条件下，求出2型弹的循序最优方案，记之为

$$(x_{12}^{(k)},\ x_{22}^{(k)},\ \cdots,\ x_{M2}^{(k)}),\ k=1,\ \cdots,\ t$$

(3) 比较上述各方案的对应目标函数值，得出$k_0\in\{1,\ \cdots,\ t\}$，它满足

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{i=1}^{n_m}(1-P_{mi}(1))^{x_{m1}^{(k_0)}}(1-P_{mi}(2))^{x_{m2}^{(k_0)}}v_{mi}$$

$$=\min_{1<k<t}\left\{\sum_{m=1}^{M}\sum_{i=1}^{n_m}(1-P_{mi}(1))^{x_{m1}^{(k)}}(1-P_{mi}(2))^{x_{m2}^{(k)}}v_{mi}\right\}$$

则取下列分配方案为问题的解：

$$\begin{pmatrix} x_{11}^{(k_0)}, & x_{21}^{(k_0)}, & \cdots, & x_{M1}^{(k_0)} \\ x_{12}^{(k_0)}, & x_{22}^{(k_0)}, & \cdots, & x_{M2}^{(k_0)} \end{pmatrix}.$$

定理 3　由循序最优枚举法所得分配方案是模型(22)～(24)的最优解。

证明　对于弹的任一分配方案$\{x_{ml}: m=1, \cdots, M;\ l=1, 2\}$，必存在$k\in\{1, \cdots, t\}$，使

$$(x_{11}, x_{21}, \cdots, x_{M1})=(x_{11}^{(k)}, x_{21}^{(k)}, \cdots, x_{M1}^{(k)})$$

按循序最优枚举法，对应的$(x_{12}^{(k)}, x_{22}^{(k)}, \cdots, x_{M2}^{(k)})$是下列问题的循序最优方案：

$$\min \sum_{m=1}^{M} \sum_{i=1}^{n_m} (1-P_{mi}(2))^{x_{m2}} \left[(1-P_{mi}(1))^{x_{m1}^{(k)}} v_{mi} \right]$$

$$s.t. \sum_{m=1}^{M} x_{m2}=K_2$$

$$x_{m2}\geqslant 0 \text{且为整数}(m=1, \cdots, M).$$

由定理 2，它也是上述问题的最优解，于是有

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{M} \sum_{i=1}^{n_m} (1-P_{mi}(1))^{x_{m1}} (1-P_{mi}(2))^{x_{m2}} v_{mi} \\ = & \sum_{m=1}^{M} \sum_{i=1}^{n_m} (1-P_{mi}(2))^{x_{m2}} \left[(1-P_{mi}(1))^{x_{m1}^{(k)}} v_{mi} \right] \\ \geqslant & \sum_{m=1}^{M} \sum_{i=1}^{n_m} (1-P_{mi}(2))^{x_{m2}^{(k)}} \left[(1-P_{mi}(1))^{x_{m1}^{(k)}} v_{mi} \right] \\ \geqslant & \sum_{m=1}^{M} \sum_{i=1}^{n_m} (1-P_{mi}(1))^{x_{m1}^{(k_0)}} (1-P_{mi}(2))^{x_{m2}^{(k_0)}} v_{mi} \end{aligned}$$

由此可知$\{x_{ml}^{(k_0)}: m=1, \cdots, M;\ l=1, 2\}$是模型(22)～(24)的最优解。　　（证毕）

在具体执行循序最优枚举法时，应将弹数较少的那个类型取为方法中的第 1 型弹，并且对第 1 型可不必把所有分配方案列出，那些明显不佳的方案可以删掉。这些措施可以减少计算量。

对于 $L>2$ 的情形也可类似地设计循序最优枚举法，但这时运算量很大且不便使用。关于一般情形下火力分配问题的解法，拟作另文讨论。

参 考 文 献

[1] Eckler R A, Burr S A. Mathematical Models of Target Coverage and Missile Allocation. MORS, 1972: 43～45

[2] Taha H A. Integer Programming, Academic Press. 1975; 139～173

[3] 张金槐. 地一地导弹对于面目标射击时的最优火力配置. 工学学报, 1977: (2)

Analysis and Solution of the System Consisting of Some Groups of Damage-dependent Targets

Zhang Ganzong Yan Xiaoying

Abstract

The fire-power allocation problem toward the plane-point targets system consisting of some groups of dagmage-dependent targets is discussed in this paper. "The principle of Marginal Damage Decreasing" and the conclusions such as "the properly sequential optimization plan, that is, global optimization plan" has been reached with the same weapons used. On the basis of above-mentioned points, the algorithm to solve problem is presented. "Properly Sequential Optimization Enumeration" has been developed with the different weapons used and conclusions concerned have been reached.

key words operations research, damage, optimization, group of damage-dependent targets、fire-power allocation problem