国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第11卷第1期　1989年3月　Vol.11.No.1

DFT的Z变换算法

蒋增荣　　余品能
（国防科技大学）（南京工程兵学院）

摘要　文中讨论了用Z变换计算DFT的方法。对于$N=2^t$的DFT，本算法所需的加法及乘法量分别为：$A=3N\log_2 N-2N$，$M=\frac{3}{2}N\log_2 N-3N+4$. 与Cooley-Tukey基-2算法比较，乘法量与加法量均减少25%. 文中还讨论了本算法在微机上的实现，给出流程图。在运算时间上，，本算法与通用FFT算法程序进行比较：节省时间30%.

关键词　离散富里叶变换(DFT)，z-变换，快速富里叶变换(FFT)
分类号　O24

引　言

自从1965年Cooley-Tukey[1]提出了一维DFT的基-2FFT算法以来，人们改进推导了许多FFT的新算法[2],[3]，但这些算法大多以增加加法运算量为代价来取得乘法量的减少。1978年Bruun[4]提出了DFT的z-变换概念并给出一种有用的多项式分解法。本文应用这种分解法，推导出一种新的FFT算法，使总运算量减少。

1　算法及其推导

1.1　DFT的z-变换

给定一N点复序列$\{x(n)\}(n=0,1,2,\cdots,N-1)$，称由下式定义的$\{X(k)\}$为其DFT

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W^{nk}\quad(k=0,1,2,\cdots,N-1)\tag{1}$$

其中$W=e^{-j2\pi/N}$，$j=\sqrt{-1}$.

显然，可用下列两式代替(1)

$$(\mathrm{I})\begin{cases}X(z)\equiv\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^n & \mathrm{mod}(z^N-1)\\ X(k)\equiv X(z) & \mathrm{mod}(z-W^k)\end{cases}$$
$$(k=0,1,2,\cdots,N-1)$$

称(Ⅰ)为序列$\{x(n)\}$的z-变换式。

1.2　DFT的z-变换算法及其推导

1988年4月7日收稿

设$N=2^t$，由多项式分解式

$$z^{4q}+az^{2q}+1=(z^{2q}-\sqrt{2-a}\,z^q+1)(z^{2q}+\sqrt{2-a}\,z^q+1) \tag{2}$$

（q为正整数）

及

$$z^N-1=\prod_{k=0}^{N-1}(z-W^k)$$

易得

$$z^{\frac{N}{2}}-1=\prod_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}(z-W^{2k}),\qquad z^{\frac{N}{2}}+1=\prod_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}(z-W^{2k+1})$$

令

$$X_1(z)\equiv X(z)\quad \bmod(z^{N/2}-1),\qquad X_2(z)\equiv X(z)\quad \bmod(z^{N/2}+1)$$

易知（Ⅰ）等价于下列（Ⅱ）、（Ⅲ）两式

$$(\text{Ⅱ})\begin{cases}X_1(z)\equiv\sum\limits_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}x_1(n)z^n\equiv\sum\limits_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}\left[x(n)+x\left(n+\dfrac{N}{2}\right)\right]z^n \quad \bmod(z^{\frac{N}{2}}-1)\\ X(2k)\equiv X_1(z)\quad \bmod(z-W^{2k})\end{cases}$$

$$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \frac{N}{2}-1.$$

$$(\text{Ⅲ})\begin{cases}X_2(z)\equiv\sum\limits_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}x_2(n)z^n\equiv\sum\limits_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}\left[x(n)-x\left(n+\dfrac{N}{2}\right)\right]z^n \quad \bmod(z^{\frac{N}{2}}+1)\\ X(2k+1)\equiv X_2(z)\quad \bmod(z-W^{2k+1})\end{cases}$$

$$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \frac{N}{2}-1.$$

显然，（Ⅱ）相应于一$\frac{N}{2}$点的DFT．称（Ⅲ）为$\frac{N}{2}$点的简化DFT．

对于（Ⅱ），可以类似于（Ⅰ）进行分解。由于

$$z^{\frac{N}{2}}-1=(z^{\frac{N}{4}}-1)(z^{\frac{N}{4}}+1),\quad z^{\frac{N}{4}}-1=\prod_{k=0}^{\frac{N}{4}-1}(z-W^{4k}),\quad z^{\frac{N}{4}}+1=\prod_{k=0}^{\frac{N}{4}-1}(z-W^{4k+2})$$

这样，（Ⅱ）等价于下列（Ⅳ），（Ⅴ）两部分

$$(\text{Ⅳ})\begin{cases}X_{11}(z)\equiv X_1(z)\quad \bmod(z^{\frac{N}{4}}-1)\equiv\sum\limits_{n=0}^{\frac{N}{4}-1}\left[x_1(n)+x_1\left(n+\dfrac{N}{4}\right)\right]z^n \quad \bmod(z^{\frac{N}{4}}-1)\\ X(4k)\equiv X_{11}(z)\quad \bmod(z-W^{4k})\end{cases}$$

$$(\text{Ⅴ})\begin{cases}X_{21}(z)\equiv X_1(z)\quad \bmod(z^{\frac{N}{4}}+1)\equiv\sum\limits_{n=0}^{\frac{N}{4}-1}\left[x_1(n)-x_1\left(n+\dfrac{N}{4}\right)\right]z^n \bmod(z^{\frac{N}{4}}+1)\\ X(4k+2)\equiv X_{21}(z)\ \bmod(z-W^{4k+2})\end{cases}$$

$$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \frac{N}{4}-1.$$

下面来考虑（Ⅲ）型简化DFT的分解。

由（2）式可得

$$z^{\frac{N}{2}}+1=(z^{\frac{N}{4}}-\sqrt{2}z^{\frac{N}{8}}+1)(z^{\frac{N}{4}}+\sqrt{2}z^{\frac{N}{8}}+1)=\prod_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}(z-W^{2k+1})$$

设 $z^{\frac{N}{4}}-\sqrt{2}z^{\frac{N}{8}}+1=\prod\limits_{k_1\in B_1}(z-W^{k_1})$，$z^{\frac{N}{4}}+\sqrt{2}z^{\frac{N}{8}}+1=\prod\limits_{k_2\in B_2}(z-W^{k_2})$，易验证有

$$B_1=\left\{8k\pm1,\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ \frac{N}{8}-1\right\},\ B_2=\left\{8k\pm3,\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ \frac{N}{8}-1\right\}$$

令

$$X_{32}(z)\equiv X_2(z)\bmod(z^{\frac{N}{4}}-\sqrt{2}z^{\frac{N}{8}}+1),\quad X_{42}(z)\equiv X_2(z)\bmod(z^{\frac{N}{4}}+\sqrt{2}z^{\frac{N}{8}}+1)$$

并注意到

$$z^{\frac{3N}{8}}\equiv z^{\frac{N}{8}}-\sqrt{2}\quad\bmod(z^{\frac{N}{4}}-\sqrt{2}z^{\frac{N}{8}}+1),\ z^{\frac{3N}{8}}\equiv z^{\frac{N}{8}}+\sqrt{2}\quad\bmod(z^{\frac{N}{4}}+\sqrt{2}z^{\frac{N}{8}}+1)$$

得

$$\begin{aligned}X_{32}(z)\equiv\sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1}x_{32}(n)z^n\equiv&\sum_{n=0}^{\frac{N}{8}-1}\left[x_2(n)-x_2\left(n+\frac{N}{4}\right)-\sqrt{2}\,x_2\left(n+\frac{3N}{8}\right)\right]z^n\\&+\sum_{n=\frac{N}{8}}^{\frac{N}{4}-1}\left[x_2(n)+\sqrt{2}\,x_2\left(n+\frac{N}{4}\right)+x_2\left(n+\frac{N}{4}\right)\right]z^n\bmod(z^{\frac{N}{4}}-\sqrt{2}z^{\frac{N}{8}}+1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X_{42}(z)\equiv\sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1}x_{42}(n)z^n\equiv&\sum_{n=0}^{\frac{N}{8}-1}\left[x_2(n)-x_2\left(n+\frac{N}{4}\right)+\sqrt{2}\,x_2\left(n+\frac{3N}{8}\right)\right]z^n\\&+\sum_{n=\frac{N}{8}}^{\frac{N}{4}-1}\left[x_2(n)-\sqrt{2}\,x_2\left(n+\frac{N}{4}\right)+x_2\left(n+\frac{N}{4}\right)\right]z^n\bmod(z^{\frac{N}{4}}+\sqrt{2}z^{\frac{N}{8}}+1)\end{aligned}$$

从而(Ⅱ)等价于下列(Ⅵ)，(Ⅶ)两部分

$$(\text{Ⅵ})\begin{cases}X_{32}(z)\equiv\sum\limits_{n=0}^{\frac{N}{4}-1}x_{32}(n)z^n\quad\bmod(z^{\frac{N}{4}}-\sqrt{2}z^{\frac{N}{8}}+1)\\X(8k\pm1)\equiv X_{32}(z)\quad\bmod(z-W^{8k\pm1})\end{cases}$$

$$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \frac{N}{8}-1$$

$$(\text{Ⅶ})\begin{cases}X_{42}(z)\equiv\sum\limits_{n=0}^{\frac{N}{4}-1}x_{42}(n)z^n\quad\bmod(z^{\frac{N}{4}}+\sqrt{2}z^{\frac{N}{8}}+1)\\X(8k\pm3)\equiv X_{42}(z)\quad\bmod(z-W^{8k\pm3})\end{cases}$$

$$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \frac{N}{8}-1.$$

一般地考虑以下两种形状式子的分解：

$$(\text{Ⅷ})\begin{cases}X_1(z)\equiv\sum\limits_{n=0}^{N/2^{i-1}-1}x(n)z^n\quad\bmod(z^{N/2^i}-F(i-1)z^{N/2^{i+1}}+1)\\X(2^{i+1}k\pm n_0)\equiv X_1(z)\quad\bmod(z-W^{2^{i+1}k\pm n_0})\end{cases}$$

其中$k=0,\ 1,\ \cdots,\ \dfrac{N}{2^{i+1}}-1$；$n_0$为常数，且满足

$$(W^{n_0})^{N/2^{i+1}}=F(i-1)/2+j\sqrt{1-\frac{F(i-1)^2}{4}} \tag{3}$$

$$(\mathrm{IX})\begin{cases}X_2(z)\equiv\sum\limits_{n=0}^{N/2^{i-1}-1}x(n)z^n \mod(z^{N/2^i}+F\ (i-1)z^{N/2^{i+1}}+1)\\ X(2^{i+1}k\pm n_0)\equiv X_2(z) \mod(z-W^{2^{i+1}k\pm n_0})\end{cases}$$

其中$k=0$，1，…，$\frac{N}{2^{i+1}}-1$；n_0为常数，且满足

$$(W^{n_0})^{N/2^{i+1}}=-F(i-1)/2+j\sqrt{1-\frac{F(i-1)^2}{4}} \tag{4}$$

这里，(Ⅷ)、(Ⅸ)式中的$F(i)$，$i=1,2,\cdots$，由下列递推式确定：

$$\begin{cases}F(1)=\sqrt{2}\\ F(2i)=\sqrt{2+F(i)},\quad F(2i+1)=\sqrt{2-F(i)}\end{cases}\qquad i=1,2,\cdots \tag{5}$$

取$i=2$，显见(Ⅷ)、(Ⅸ)即为(Ⅵ)、(Ⅶ)。

对于(Ⅷ)，由(2)、(5)式可得

$$\begin{aligned}&z^{N/2^i}-F(i-1)z^{N/2^{i+1}}+1\\ &=(z^{N/2^{i+1}}-F(2i-2)z^{N/2^{i+2}}+1)(z^{N/2^{i+1}}+F(2i-2)z^{N/2^{i+2}}+1)\end{aligned}$$

令

$$X_{11}(z)\equiv X_1(z)\mod(z^{N/2^{i+1}}-F(2i-2)z^{N/2^{i+2}}+1),$$

$$X_{21}(z)\equiv X_1(z)\mod(z^{N/2^{i+1}}+F(2i-2)z^{N/2^{i+2}}+1)$$

易验证有

$$z^{N/2^{i+1}}-F(2i-2)z^{N/2^{i+2}}+1=\prod_{k=0}^{N/2^{i+2}-1}(z-W^{2^{i+2}k\pm n_0}$$

$$z^{N/2^{i+1}}+F(2i-2)z^{N/2^{i+2}}+1=\prod_{k=0}^{N/2^{i+2}-1}(z-W^{2^{i+2}k\pm(2^{i+1}-n_0)})$$

故(Ⅷ)式等价于如下两式

$$\begin{cases}X_{11}(z)\equiv X_1(z) \mod(z^{N/2^{i+1}}-F(2i-2)z^{N/2^{i+1}}+1)\\ X(2^{i+2}k\pm n_0)\equiv X_{11}(z) \mod(z-W^{2^{i+2}k\pm n_0})\end{cases}$$

$$\begin{cases}X_{21}(z)\equiv X_1(z) \mod(z^{N/2^{i+1}}+F(2i-2)z^{N/2^{i+2}}+1)\\ X(2^{i+2}k\pm(2^{i+1}-n_0))\equiv X_{21}(z) \mod(z-W^{2^{i+2}k\pm(2^{i+1}-n_0)})\end{cases}$$

对于(Ⅸ)，利用

$$\begin{aligned}&z^{N/2^i}+F(i-1)z^{N/2^{i+1}}+1\\ &=(z^{N/2^{i+1}}-F(2i-1)z^{N/2^{i+2}}+1)(z^{N/2^{i+1}}+F(2i-1)z^{N/2^{i+2}}+1)\end{aligned}$$

可进行类似的分解。

显然，分解后所有的式子仍可归结为(Ⅷ)、(Ⅸ)两种形状，故可将上述步骤一直进行下去，直至多项式的次数为2。

综上所述，可将$N=2^t$点DFT序列$\{X(j)\}$分解为

$$\begin{cases} X_1(z) \equiv X(z) & \bmod(z^2-1) \\ X(j) \equiv X_1(z) & \bmod(z-W^j),\ i\in B_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_2(z) \equiv X(z) & \bmod(z^2+1) \\ X(j) \equiv X_2(z) & \bmod(z-W^j),\ j\in B_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_{2i+1}(z) \equiv X(z) & \bmod(z^2-F(i)z+1) \\ X(j) \equiv X_{2i+1}(z) & \bmod(z-W^j),\ j\in B_{2i+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_{2i+2}(z) \equiv X(z) & \bmod(z^2+F(i)z+1) \\ X(j) \equiv X_{2i+2}(z) & \bmod(z-W^j),\ j\in B_{2i+2} \end{cases}$$

$$i=1,2,\cdots,\frac{N}{4}-1.$$

这里$B_j\left(j=1,2,\cdots,\frac{N}{2}\right)$均为两个元素的集合，由下列关系式确定：

$$B_{1,1}=\left\{2k\mid k=0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1\right\},\quad B_{2,1}=\left\{2k+1\mid k=0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1\right\}$$

$$B_{1,i+1}=\left\{2^{i+1}k\mid k=0,1,\cdots,\frac{N}{2^{i+1}}-1\right\},\quad B_{2,i+1}=\left\{2^{i+1}k+2^i\mid k=0,1,\cdots,\frac{N}{2^{i+1}}-1\right\}$$

$$B_{j,i}=\left\{2^{i+1}k\pm n_{j,i}\mid k=0,1,\cdots,\frac{N}{2^{i+1}}-1\right\}$$

$$(j=3,4,\cdots,2^i;\ i=2,3,\cdots,t-1)$$

$$B_j=B_{j,t-1},\quad (j=1,2,\cdots,2^t-1) \tag{6}$$

其中$n_{j,i}$满足下列递推关系式

$$\begin{cases} n_{2,2}=2,\ n_{3,2}=1,\ n_{4,2}=3,\ n_{1,i}=0 \\ n_{2j-1,i+1}=n_{j,i} \\ n_{2j,i+1}=2^{i+1}-n_{j,i}, \qquad j=2,3,\cdots,2^i;\ i=2,3,\cdots,t-2 \end{cases} \tag{7}$$

$F(i)$由(5)式确定。

例 利用z-变换法计算$N=16$点DFT

$$X(k)=\sum_{n=0}^{15}x(n)W^{nk},\quad k=0,1,\cdots,15$$

解 z-变换式为

$$\begin{cases} X(z) \equiv \sum_{n=0}^{15}x(n)z^n & \bmod(z^{16}-1) \\ X(k) \equiv X(z) & \bmod(z-W^k) \end{cases}$$

(1)
$$\begin{cases} X_1(K) \equiv \sum_{n=0}^{7}x_{1,1}(n)z^n \equiv \sum_{n=0}^{7}[x(n)+x(n+8)]z^n & \bmod(z-W^j) \\ \qquad j\in B_{1,1}=\{2k\mid k=0,1,\cdots,7\} \\ X_1(K+8) \equiv \sum_{n=0}^{7}x_{2,1}(n)z^n \equiv \sum_{n=0}^{7}[x(n)-x(n+8)]z^n & \bmod(z-W^j) \end{cases}$$

$$j \in B_{2,1} = \{2k+1 \mid k=0,1,\cdots,7\}$$
$$(K=0,1,2\cdots,7)$$

(2)
$$\begin{cases} X_2(K) \equiv \sum_{n=0}^{3} x_{1,2}(n) z^n \equiv \sum_{n=0}^{3} [x_{1,1}(n) + x_{1,1}(n+4)] z^n \mod (z - W^j) \\ \qquad j \in B_{1,2} = \{4k \mid k=0,1,2,3\} \\ X_2(K+4) \equiv \sum_{n=0}^{3} x_{2,2}(n) z^n \equiv \sum_{n=0}^{3} [x_{1,1}(n) - x_{1,1}(n+4)] z^n \mod (z - W^j) \\ \qquad j \in B_{2,2} = \{4k+2 \mid k=0,1,2,3\} \end{cases}$$
$$(K=0,1,2,3)$$

$$\begin{cases} X_2(K) \equiv \sum_{n=0}^{3} x_{3,2}(n) z^n \equiv \sum_{n=0}^{1} [x_{2,1}(n) - x_{2,1}(n+4) - \sqrt{2}\, x_{2,1}(n+6)] z^n \\ \qquad + \sum_{n=2}^{3} [x_{2,1}(n) + \sqrt{2}\, x_{2,1}(n+2) + x_{2,1}(n+4)] z^n \mod (z - W^j) \\ \qquad j \in B_{3,2} = \{8k \pm 1 \mid k=0,1\} \\ X_2(K+4) \equiv \sum_{n=0}^{3} x_{4,2}(n) z^n \equiv \sum_{n=0}^{1} [x_{2,1}(n) - x_{2,1}(n+4) + \sqrt{2}\, x_{2,1}(n+6)] z^n \\ \qquad + \sum_{n=2}^{3} [x_{2,1}(n) - \sqrt{2}\, x_{2,1}(n+2) + x_{2,1}(n+4)] z^n \mod (z - W^j) \\ \qquad j \in B_{4,2} = \{8k \pm 3 \mid k=0,1\} \end{cases}$$
$$(K=8,9,10,11)$$

(3)

$$X_3(K) \equiv \sum_{n=0}^{1} x_{1,3}(n) z^n \equiv \sum_{n=0}^{1} [x_{1,2}(n) + x_{1,2}(n+2)] z^n \quad \mod (z - W^j)$$
$$j \in B_1 = B_{1,3} = \{8k \mid k=0,1\}$$

$$X_3(K+2) \equiv \sum_{n=0}^{1} x_{2,3}(n) z^n \equiv \sum_{n=0}^{1} [x_{1,2}(n) - x_{1,2}(n+2)] z^n \mod (z - W^j)$$
$$j \in B_2 = B_{2,3} = \{8k+4 \mid k=0,1\}$$

$$X_3(K+4) \equiv \sum_{n=0}^{1} x_{3,3}(n) z^n \equiv x_{2,2}(0) - x_{2,2}(2) - \sqrt{2}\, x_{2,2}(3)$$
$$+ [x_{2,2}(1) + \sqrt{2}\, x_{2,2}(2) + x_{2,2}(3)] z \mod (z - W^j)$$
$$j \in B_3 = B_{3,3} = \{2, 14\}$$

$$X_3(K+6) \equiv \sum_{n=0}^{1} x_{4,3}(n) z^n \equiv x_{2,2}(0) - x_{2,2}(2) + \sqrt{2}\, x_{2,2}(3)$$
$$+ [x_{2,2}(1) - \sqrt{2}\, x_{2,2}(2) + x_{2,2}(3)] z \quad \mod (z - W^j)$$
$$j \in B_4 = B_{4,3} = \{6, 10\}$$

$$X_3(K+8) \equiv \sum_{n=0}^{1} x_{5,3}(n) z^n \equiv x_{3,2}(0) - x_{3,2}(2) - \sqrt{2+\sqrt{2}}\, x_{3,2}(3)$$
$$+ [x_{3,2}(1) + \sqrt{2+\sqrt{2}}\, x_{3,2}(2) + (1+\sqrt{2})\, x_{3,2}(3)] z$$
$$\mod (z - W^j)$$

$$j \in B_5 = B_{5,3} = \{1,\ 15\}$$

$$X_3(K+10)\equiv\sum_{n=0}^{1}x_{6,3}(n)z^n\equiv x_{3,2}(0)-x_{3,2}(2)+\sqrt{2+\sqrt{2}}\,x_{3,2}(3)$$
$$+[x_{3,2}(1)-\sqrt{2+\sqrt{2}}\,x_{3,2}(2)+(1+\sqrt{2})x_{3,2}(3)]z$$
$$\bmod(z-W^j)$$
$$j\in B_6=B_{6,3}=\{7,9\}$$

$$X_3(K+12)\equiv\sum_{n=0}^{1}x_{7,3}(n)z^n\equiv x_{4,2}(0)-x_{4,2}(2)-\sqrt{2-\sqrt{2}}\,x_{4,2}(3)$$
$$+[x_{4,2}(1)+\sqrt{2-\sqrt{2}}\,x_{4,2}(2)+(1-\sqrt{2})x_{4,2}(3)]z$$
$$\bmod(z-W^j)$$
$$j\in B_7=B_{7,3}=\{3,13\}$$

$$X_3(K+14)\equiv\sum_{n=0}^{1}x_{8,3}(n)z^n\equiv x_{4,2}(0)-x_{4,2}(2)+\sqrt{2-\sqrt{2}}\,x_{4,2}(3)$$
$$+[x_{4,2}(1)-\sqrt{2-\sqrt{2}}\,x_{4,2}(2)+(1-\sqrt{2})x_{4,2}(3)]z$$
$$\bmod(z-W^j)$$
$$j\in B_8=B_{8,3}=\{5,11\}$$
$$(K=0,\ 1)$$

(4) $\begin{cases}X_4(0)=x_{1,3}(0)+x_{1,3}(1)\\X_4(1)=x_{1,3}(0)-x_{1,3}(1)\end{cases}$ $\begin{cases}X_4(2)=x_{2,3}(0)+jx_{2,3}(1)\\X_4(3)=x_{2,3}(0)-jx_{2,3}(1)\end{cases}$

$\begin{cases}X_4(4)=x_{3,3}(0)+W^2x_{3,3}(1)\\X_4(5)=x_{3,3}(0)+W^{-2}x_{3,3}(1)\end{cases}$ $\begin{cases}X_4(6)=x_{4,3}(0)+W^6x_{4,3}(1)\\X_4(7)=x_{4,3}(0)+W^{-6}x_{4,3}(1)\end{cases}$

$\begin{cases}X_4(8)=x_{5,3}(0)+Wx_{5,3}(1)\\X_4(9)=x_{5,3}(0)+W^{-1}x_{5,3}(1)\end{cases}$ $\begin{cases}X_4(10)=x_{6,3}(0)+W^7x_{6,3}(1)\\X_4(11)=x_{6,3}(0)+W^{-7}x_{6,3}(1)\end{cases}$

$\begin{cases}X_4(12)=x_{7,3}(0)+W^3x_{7,3}(1)\\X_4(13)=x_{7,3}(0)+W^{-3}x_{7,3}(1)\end{cases}$ $\begin{cases}X_4(14)=x_{8,3}(0)+W^5x_{8,3}(1)\\X_4(15)=x_{8,3}(0)+W^{-5}x_{8,3}(1)\end{cases}$

(5) 根据B_j，$j=1,2,\cdots,8$，可得

$X(0)=X_4(0)$， $X(8)=X_4(1)$， $X(4)=X_4(2)$， $X(12)=X_4(3)$

$X(2)=X_4(4)$， $X(14)=X_4(5)$， $X(6)=X_4(6)$， $X(10)=X_4(7)$

$X(1)=X_4(8)$， $X(15)=X_4(9)$， $X(7)=X_4(10)$， $X(9)=X_4(11)$

$X(3)=X_4(12)$， $X(13)=X_4(13)$，$X(5)=X_4(14)$， $X(11)=X_4(15)$，

其流程图如下图1.

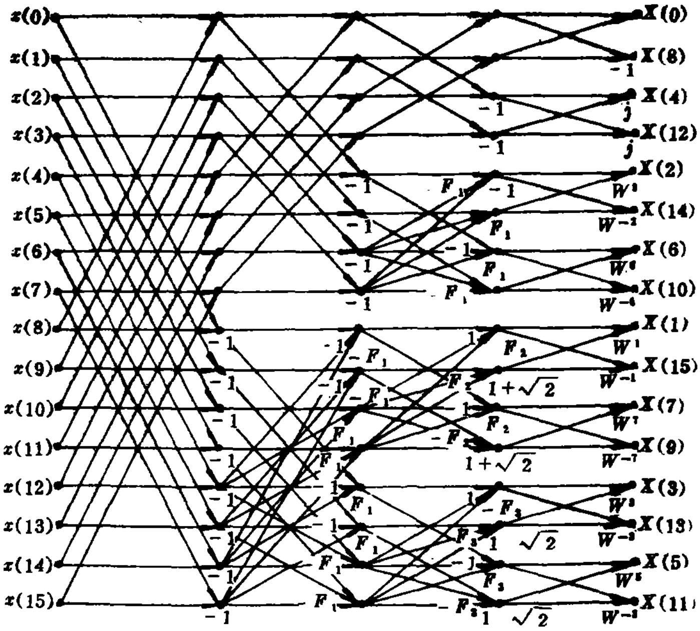

图 1　16点DFT的z-变换算法流程图

3　运算量的估计

下面统计运用上述z-变换算法来计算$N=2^t$点复序列的DFT所需的运算量。

第一级($i=1$时)

由(Ⅰ)、(Ⅱ)两式知，按模$z^{N/2}\pm 1$的简化共需$\frac{N}{2}\times 2=N$个复加。

第二级($i=2$时)

(1) 由(Ⅳ)、(Ⅴ)知，按模$z^{N/4}\pm 1$的简化需$\frac{N}{4}\times 2=\frac{N}{2}$个复加。

(2) 由(Ⅵ)、(Ⅶ)知，按模$z^{N/4}\pm\sqrt{2}\,z^{N/8}+1$的简化需$\frac{N}{4}\times 3$个复加，$\frac{N}{4}$个复乘。

故共需$2\times\frac{N}{4}+3\times\frac{N}{4}=\frac{5N}{4}$个复加，$\frac{N}{4}$个复乘。

第三级($i=3$时)

易知

(1) 按模$z^{N/8}\pm 1$的简化需$\frac{N}{8}\times 2=\frac{N}{4}$个复加；

(2) 按模$z^{N/8}\pm\sqrt{2}\,z^{N/16}+1$的简化需$\frac{N}{8}\times 3$个复加，$\frac{N}{8}$个复乘；

(3) 按模$z^{N/8}\pm\sqrt{2-\sqrt{2}}\,z^{N/16}+1$的简化需$\frac{N}{8}\times 3$个复加，$\frac{3N}{16}$个复乘；

(4) 按模$z^{N/8}\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}\,z^{N/16}+1$的简化同(3)类似，需$\frac{N}{8}\times 3$个复加，$\frac{3N}{16}$个复乘。

故第三级共需$\frac{11}{8}N$个复加，$\frac{N}{2}$个复乘。

一般地，第i $(3\leqslant i\leqslant t-1)$级所需复加个数为$2\times\frac{N}{2^i}+3\times\frac{N}{2^i}(2^{i-1}-1)$，复乘个数为$\frac{N}{2^i}+3\times\frac{N}{2^{i+1}}(2+2^2+\cdots+2^{i-2})=\frac{N}{2^i}+\frac{3N}{2^{i+1}}(2^{i-1}-2)$。

所以，除最后一级$(i=t)$外，前面$t-1$级总运算量为$\frac{3}{2}N\log_2 N-\frac{5N}{2}+2$个复加，$\frac{3}{4}N\log_2 N-\frac{5N}{2}+4$个复乘。

另外，最后一级的运算即为如下形式的简化：

$$az+b \qquad \bmod(z-W^{\pm k}),\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ \frac{N}{2}-1$$

易知，当$k=0,\frac{N}{4}$时，上式的简化共需8次实加；当$k=\frac{N}{8}$，$\frac{3N}{8}$时，上式的简化共需4次实乘，12次实加；当k为其它$\left(\frac{N}{2}-4\right)$个值时，上式的简化共需$\left(\frac{N}{2}-4\right)\times 4=2N-16$次实乘，$\left(\frac{N}{2}-4\right)\times 6=3N-24$次实加。故最后一级的简化共需$3N-4$次实加，$2N-12$次实乘。

注意到除最后一级外，所有的复乘均为一实数与一复数的乘法，故可由两次实乘来实现一次这种复乘。所以用z-变换法计算$N=2^t$点复序列的DFT总运算量为

实加： $3N\log_2 N-2N$

实乘： $\frac{3}{2}N\log_2 N-3N-4$.

值得一提的是，用该算法来计算实序列的DFT尤为有利，因为除最后一级外，前面$t-1$级中的系数均为实数。易知此时最后一级需$\frac{N}{2}$次实加，$N-7$次实乘。所以，用z-变换法计算$N=2^t$点实序列的DFT总运算量为

实加： $\frac{3}{2}N\log_2 N-2N+2$

实乘： $\frac{3}{4}N\log_2 N-\frac{3}{2}N-3$

3 运算时间的比较

根据上述算法，得到如下计算框图（见图2）。据这框图，编制了计算程序。在IBM-PC机上进行了计算，结果表明，该算法完全正确，而且精确度高。对于 $N=2^t$ $(5\leqslant t\leqslant 10)$ 点复序列的DFT，比较了z-变换算法与Cooley—Tukey算法的运行时间，见表1。

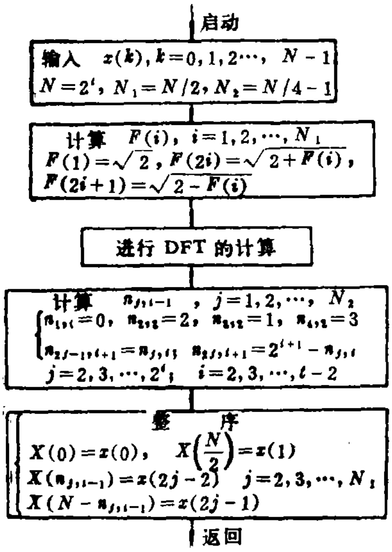

图 2 DFT的z-变换算法计算框图

表 1 DFT的z-变换算法与Cooley—Tukey法运算时间比较表

N	T_z(秒)	T_c(秒)	$1-\left(\frac{T_z}{T_c}\right)\times 100\%$
32	0.10	0.16	37.49
64	0.27	0.38	28.93
128	0.65	0.82	20.73
256	1.48	1.92	22.96
512	3.29	4.11	20.01
1024	7.19	8.89	19.12

由1表可看出，对于 N 点 DFT，利用z-变换算法来计算所需运行时间比 Cooley-Tukey 算法减少20%左右。用来比较的Cooley—Tukey算法的计算程序是目前通用于各类计算机经过优化的程序。

参 考 文 献

[1] Cooley J W and Tukey J W. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier Series. Math. Comput. 1965; 19: 297~301

[2] Rader C M. A new principle for Fast Fourier Transforms. IEEE Trans. 1976; ASSP-24: 264~265

[3] Mcclellan J H, Rader C M. Number Theory in digital signal processing. 1979

[4] Geory Bruun. Z-Transform DFT Filters and FFT'S. IEEE Trans. 1978; ASSP-26 (1): 56~63

An Algorithm on Z-Transform for DFT

Jiang Zengrong Yu Pinneng

Abstract

In this paper, the method of computing DFT with Z-transform is discussed. The amount of additions and multiplications operating $N=2^t$ point DFT is remarkably decreased compared with the Cooley-Tukey's radix-2 FFT algorithm. The implementation of this algorithm on IBM-PC is discussed. The comparison of this two algorithms running time is given.

key words: discrete fourier transform (DFT), Z-transform, fast fourier tranform (FFT)