国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第11卷第2期 1989年6月 Vol.11.No.2

一类二阶椭圆型边值问题正解的唯一性*

谢 永 安

（系统工程与应用数学系）

摘 要 文中讨论了一类二阶椭圆型边值问题正解的唯一性。削弱了文献[1]中主要定理的条件，并将其推广到一般光滑区域，所用方法主要是对格林函数的精细估计。

关键词 偏微分方程，椭圆型，边值问题，格林函数

分类号 O175.8，O174.54

引 言

考虑边值问题

$$\begin{cases}-\Delta u(x)=\lambda f(u(x)) & x\in\Omega\\ u(x)=0 & x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{1}$$

的非负解。这里 $\lambda\geqslant 0$，Ω是 $R^n(n\geqslant 3)$中一光滑有界域，$\partial\Omega$表Ω的边界，非线性项f定义在$[0,\infty)$上，且满足下列条件：

(F_1)：$f\in C^2([0,\infty))$，且对$0\leqslant u<\infty$，$f(u)>0$成立；

(F_2)：f严格递增且存在两常数$Z,\delta>0$使有$f'(u)\leqslant Z/(1+u)^{1+\delta}$，$u\geqslant 0$.

本文的目的是要论证文[1]中的一个猜想，即证明文[1]中定理4.1在$n\geqslant 3$时对一般的区域也成立。此外，我们还削弱了定理的条件。

1 基 本 引 理

引理 1 令$G(x,y)$表示方程$-\Delta u=h$在Ω中的Dirichlet问题的格林函数，$d(x)$表示点x到$\partial\Omega$的距离，则对任意的$x,y\in\Omega$，$x\neq y$有

$$0\leqslant G(x,y)\leqslant Cd(x)\,|x-y|^{1-n}$$

这里$n\geqslant 3$，常数C仅依赖Ω.

引理的证明见文献[2]。

引理 2 令

$$u_0(x)=\int_\Omega G(x,y)\,dy$$

则存在正常数$\theta_1<\theta_2$，使

$$\theta_1 d(x)\leqslant u_0(x)\leqslant\theta_2 d(x)，\quad x\in\bar{\Omega}$$

1988年1月11日收稿
*研究简报

证明 右边不等式从引理1即可推出。显然有

$$-\Delta u_0(x)=1 \qquad x\in\Omega$$
$$u_0(x)=0 \qquad x\in\partial\Omega$$

且$u_0(x)\in C^1(\bar{\Omega})$（可参看文[2]），由极值原理$u_0(x)>0, x\in\Omega$. 由强极值原理，$u$在 $\partial\Omega$上点的内法向导数满足严格不等式

$$\partial u_0/\partial v>0$$

由于$u_0(x)\in C^1(\bar{\Omega})$且$\partial\Omega$光滑，故有某常数$\eta>0$使

$$\partial u_0/\partial v\geqslant\eta \qquad x\in\partial\Omega$$

对于充分小的$d>0$，令

$$M_d=\bigcup_{x_0\in\partial\Omega}M_{x_0}^d$$

其中$M_{x_0}^d=\{x\,|x$位于x_0的内法线上，属于$\bar{\Omega}$且与x_0之距离不超过$d\}$，显然有

$$M_d=N_d=\{x\,|\mathrm{dist}(x,\partial\Omega)\leqslant d\}$$

令

$$A_d=\bigcup_{x_0\in\partial\Omega}A_{x_0}^d$$

其中$A_{x_0}^d=\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}v_i(x_0)\,|\,x\in M_{x_0}^d\right\}$. 我们断言，对于充分小的$d$将有

$$\min A_d\geqslant\eta/2$$

否则，存在一串$d_n\searrow 0$，相应地有$\lambda_n\in A_{d_n}$，使$\lambda_n\leqslant\eta/2$.

设

$$\lambda_m=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u(x_m)}{\partial x_i}v_i(y_i)$$

这里$x_m\in N_{d_m}$，$y_m\in\partial\Omega$. 因$\{x_m\}$, $\{y_m\}$有界，故存在子序列$x_{n_k}\to x_0$，$y_{n_k}\to y_0$，这时

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u(x_0)}{\partial x_i}v_i(y_0)\leqslant\eta/2$$

又$y_0\in\partial\Omega$，$|x_n-y_n|\leqslant d_n$，故$x_0=y_0$，由此推出

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u(x_0)}{\partial x_i}v_i(x_0)\leqslant\eta/2$$

矛盾。取定$d>0$，使

$$\min A_d\geqslant\eta/2$$

则对任意的$x\in N_d=M_d$，假定$x\in M_{x_0}^d$，这时

$$(u_0(x)-u_0(x_0))/\,|x-x_0|=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u(\zeta)}{\partial x_i}v_i(x_0)$$

其中ξ在x_0与x的连线上，即在x_0处的法线上，所以$\xi\in N_{x_0}^d$

$$(u_0(x)-u_0(x_0))/\,|x-x_0|\geqslant\eta/2$$

即$u_0(x)\geqslant(\eta/2)\,|x-x_0|\geqslant(\eta/2)d(x)$.

由于$(\bar{\Omega}/\bar{N_d})$是有界闭集，故有某$c>0$，使$u(x)\geqslant c$对其上的每点成立，这时有

$$u(x)\geqslant(c/d(x))d(x)\geqslant(c/\mathrm{diam}\Omega)d(x)$$

这里$\mathrm{diam}\Omega$表示Ω之直径。令$\theta_1=\min\{\eta/2,c/\mathrm{diam}\Omega\}$，就有$u(x)\geqslant\theta_1 d(x)$对$x\in\bar{\Omega}$成立。

（证毕）

引理 3　对于任给的$\varepsilon>0$，存在$d_0>0$，当$d<d_0$时，有

$$\int_{N_d}|x-y|^{1-n}dy<\varepsilon$$

对$x\in\bar{\Omega}$一致成立。

证明　对于任给的$\varepsilon>0$，设$C_x^{\varepsilon}=\{y\,|x-y|\leqslant\varepsilon\}$，则有

$$\int_{N_d}|x-y|^{1-n}dy\leqslant\int_{N_d-C_x^{\varepsilon}}|x-y|^{1-n}dy+\int_{C_x^{\varepsilon}}|x-y|^{1-n}dy$$

$$\leqslant(1/\varepsilon^{n-1})\int_{N_d-C_x^{\varepsilon}}dy+\int_{C_x^{\varepsilon}}|x-y|^{1-n}dy$$

作球面坐标变换可得：

$$\int_{C_x^{\varepsilon}}|x-y|^{1-n}dy\geqslant K\varepsilon$$

其中K为不依赖于ε和x的常数，所以

$$\int_{N_d}|x-y|^{1-n}dy\leqslant(1/\varepsilon^{n-1})\operatorname{mes}N_d+K\varepsilon$$

因$\lim\limits_{d\to 0}\operatorname{mes}N_d=0$，故存在某$d_0>0$，使当$d<d_0$时$\operatorname{mes}N_d<\varepsilon^n$，这时

$$\int_{N_d}|x-y|^{1-n}dy<(K+1)\varepsilon$$

（证毕）

引理 4　在(F_1)，(F_2)的假设下，$(1,1)_\lambda$对所有$\lambda\geqslant 0$均有非负解以及最大非负解$\bar{u}_\lambda$，最小非负解u_λ.

证明　事实上，这时f满足文[1]里所列条件$(f_1)(f_2)(f_{3a})$，由文[3]即得引理的证明。

引理 5　设f满足(F_1)，(F_2)，则$(1,1)_\lambda$的最大非负解$\bar{u}_\lambda$，最小非负解u_λ满足

(1)　$u_\lambda(x)\geqslant\lambda f(0)u_0(x)$对$x\in\bar{\Omega}$成立；

(2)　若$u_\lambda(x)\neq\bar{u}_\lambda(x)$，则$u_\lambda(x)<\bar{u}_\lambda(x)$，$x\in\Omega$.

证明　应用极大值原理即可推出。

2　主要定理及证明

定理　设f满足(F_1)，(F_2)，则存在$-\bar{\lambda}>0$，使得对所有$\lambda>\bar{\lambda}$，$(1,1)_\lambda$存在唯一的非负解。

证明　若$\bar{u}_\lambda\neq u_\lambda$（由引理4，$\bar{u}_\lambda$、$u_\lambda$存在），由引理5(2)有$u_\lambda(x)<\bar{u}_\lambda(x)$，$x\in\Omega$. 令$W_\lambda=\bar{u}_\lambda-u_\lambda$，则有

$$W_\lambda(x)=\lambda\int_\Omega G(x,y)(f(\bar{u}_\lambda(y))-f(u_\lambda(y)))dy$$

$$=\lambda\int_\Omega G(x,y)f'(\theta_\lambda(y))W_\lambda(y)dy\qquad x\in\Omega$$

这里$u_\lambda\leqslant\theta_\lambda\leqslant\bar{u}_\lambda$，设$x_\lambda\in\Omega$使$W_\lambda(x_\lambda)=\max\limits_{\bar{\Omega}}W_\lambda(y)$，因$f'(u)\geqslant 0$，可推出

$$W_\lambda(x_\lambda)\leqslant\lambda W_\lambda(x_\lambda)\int_\Omega G(x_\lambda,y)f'(\theta_\lambda(y))dy$$

因此

$$S(\lambda)=\lambda\int_{\Omega}G(x_{\lambda},y)f'(\theta_{\lambda}(y))dy\geqslant 1 \tag{1}$$

另一方面，由引理3，对任给的$\varepsilon>0$，存在$d_0>0$使

$$\int_{N_{d_0}}|x_{\lambda}-y|^{1-n}dy<\varepsilon \tag{2}$$

而由假设(F_2)，得

$$S(\lambda)\leqslant\lambda\int_{\Omega}G(x_{\lambda},y)\frac{Z}{(1+\theta_{\lambda}(y))^{1+\delta}}dy$$

应用引理5(1)，有

$$S(\lambda)\leqslant\lambda Z\int_{\Omega}G(x_{\lambda},y)\frac{dy}{(1+\lambda f(0)u_0(y))^{1+\delta}}$$

应用引理1,2及等式$G(x,y)=(dy,x)$，得：

$$S(\lambda)\leqslant\lambda Z\int_{\Omega}\frac{Cd(y)|x_{\lambda}-y|^{1-n}}{(1+\lambda f(0)\theta_1 d(y))^{1+\delta}}dy$$

令$t=1/(\theta_1\lambda f(0))$，$\beta=CZ/(\theta_1 f(0))$，上式可写成

$$\begin{aligned}S(\lambda)&\leqslant\beta t^{\delta}\int_{\Omega\setminus N_{d_0}}\frac{d(y)}{(t+d(y))^{1+\delta}}|x_{\lambda}-y|^{1-n}dy+\beta t^{\delta}\int_{N_{d_0}}\frac{d(y)}{(t+d(y))^{1+\delta}}|x_{\lambda}-y|^{1-n}dy\\&=I_1+I_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_1&\leqslant\beta t^{\delta}\int_{\Omega\setminus N_{d_0}}\frac{\mathrm{diam}\,\Omega}{(t+d_0)^{1+\delta}}|x_{\lambda}-y|^{1-n}dy\\&\leqslant\frac{\beta\,\mathrm{diam}\,\Omega}{d_0^{1+\delta}}t^{\delta}\int_{\Omega}|x_{\lambda}-y|^{1-n}dy\end{aligned}$$

所以$\lim\limits_{\lambda\to\infty}I_1=0$ (3)

$$I_2\leqslant\beta\int_{N_{d_0}}|x_{\lambda}-y|^{1-n}dy$$

由(2)式得

$$I_2<\beta\varepsilon \tag{4}$$

由(3)、(4)式有

$$\lim_{\lambda\to\infty}S(\lambda)\leqslant\beta\varepsilon$$

由于ε的任意性，$\lim\limits_{\lambda\to\infty}S(\lambda)=0$，这与(1)式矛盾。故$\bar{u}_{\lambda}=u_{\lambda}$. （证毕）

本文承导师刘森石副教授热情指导，王正明同志提出宝贵意见，在此一并致谢。

参 考 文 献

[1] Ratnasingham Shivaji.Nonlinear Analysis,1983;17(2); 223～230

[2] Sonia M.Gomes.SIAM J.MATH.ANAL,1986;17(6)

[3] Brown K J, Ibrahim M M A. & Shivaji R. Nonlinear Anal,1981; 5(5); 475～486

Unipueness of a Positive Solution to a Class of Second Order Elliptic Boundary Value Problems

Xie Yongan

Abstract

In this paper, the uniqueness of a positive solution to a class of second order elliptic boundary value problems is disscussed, a conjecture presented in [1] for the case $n\geqslant3$ is proved. The result of [1] is improved as well.

Key Words: partial deffirential equation, elliptic, boundary value problem, Green function