国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第11卷第2期　1989年6月　Vol.11.No.2

"三色图"的一个充分条件*

董晓光

（系统工程与应用数学系）

摘　要　文中证明了定理：若图G中不存在与K_4同胚的子图，则其色数$X(G)\leqslant 3$。进而得到三色图的一个充分条件。只要能证明与上述定理类似的一个定理："若图G中不存在与K_5同胚的子图，则其色数$X(G)\leqslant 4$"，则世界著名的"四色猜想(4CC)"即得证。

关键词　图论，三色图，充分条件

分类号　O157.5

引　言

"四色猜想"，同哥德巴赫猜想一样举世瞩目。为求证这个问题，过去一个半世纪的努力全遭失败。特别是1976年美国的K Appel教授等人的那个计算机"证明"，其复杂程度在整个数学史上是空前的：高速大型电子计算机忙碌了1200小时，进行逻辑判断上百亿次（还未包括人的大量工作在内）。它尽管曾轰动于一时，但结果还是以失败告终[3]。因为结论是关于可平面图的,就把思想桎梏在可平面图这个狭隘的范围内，且舍本求末，完全忽视可平面图的根本所在。这就是这些失败的共同特点，也正是失败的总根源。

什么是可平面图的根本？

库拉图斯基(Kuratowski)定理(文[1]，定理11,13) 已指明：G是可平面图，当且仅当它没有同胚于K_5或$K_{3,3}$的子图。

于是，"四色猜想"可叙述为："若G没有同胚于K_5或$K_{3,3}$的子图，则其色数$X(G)\leqslant 4$".

然而，"没有同胚于K_5或$K_{3,3}$的子图"，满足这一条件的图的类型是不可穷尽的。150年的历史教训已说明：直接证明事实上是不可能的。我们唯有从它的逆否命题入手，为此，不可不涉及关于图的色数与其构造特征之间一般规律性的探讨。显然，只要局限于可平面图的狭隘范围就决不可能做到这一点。

本文证明的定理5："若图G中不存在与K_4同胚的子图，则其色数$X(G)\leqslant 3$"，以此为基础，可以立即得到三色图的一个充分条件（本文定理1）。与此同时，只要能再进一步，证出类似命题："若图G中不存在与K_5同胚的子图，则其色数$X(G)\leqslant 4$"，也就是证得了"四色猜想"。鉴此，本文定理5事实上也是求证"四色猜想"过程中的一个重要的中间结果。

1988年8月8日收稿

*研究简报

本文只讨论图的顶点着色。除特别声明处外，文中的术语及有关记号均按文[1]的定义。

1 定理和证明

本文最终要证明的是

定理 1 若图G中不存在与K_4同胚的子图，且G中存在奇圈，则图的色数$X(G)=3$.

为便于叙述，先作一些准备。首先证明G为可平面图的一个充分条件，即

定理 2 若G中不存在与K_4同胚的子图，则G是一个可平面图。

证明 如图1所示，$K_{3,3}$中存在与K_4同胚的子图，又K_4是K_5的子图，故若G有子图与K_5或$K_{3,3}$同胚，必有子图与K_4同胚。由库拉图斯基定理(文[1]，定理11.13)知：若G是不可平面图，则G必有子图与K_4同胚。（证毕）

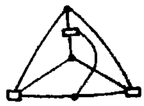


图 1

据此定理2，下面只须讨论G为可平面图的情况。

首先考察外可平面图。由已知定理(文[2]，定理7.3.1)知：若G是外可平面图，则G中不存在与K_4同胚的子图。下面证明：若G是外可平面图，则G的色数$X(G)\leqslant 3$.为此，只须证明G为最大外可平面图的情况，也就是下面的定理3.

定理 3 若G是最大外可平面图，则其色数$X(G)=3$.

证明 只须证G为最大外平面图的情况。由最大外平面图的性质（文[2]，定理7.2.8）知：它的外部面的边界是一个圈，每一个内部面是一个三角形。

下面对其内部面的数目n用归纳法。

当$n=1,2$时，命题显然成立。

设$n=k$时命题成立，下面证明：$n=k+1$时命题成立。

如图2所示，设G是一个有$k+1$个内部面的最大外平面图，外部面边界为圈：$V_0V_1\cdots V_iV_{i+1}\cdots V_jV_{j+1}V_0$.

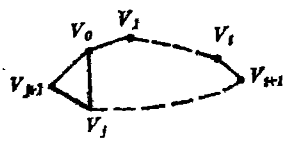


图 2

由最大外平面图的性质（文[2]，定理7.2.12）知：G中至少有两个顶点的度为2，不妨设其中之一即V_{j+1}（如图2所示），则子图$G-V_{j+1}$即是一个有k个内部面的最大外平面图，由归纳法假设有

$$X(G-V_{j+1})=3$$

据临界点的性质（文[2]，定理8.1.6），由于

$$\deg(V_{j+1})=2<4-1$$

故V_{j+1}不可能是一个4色图的临界点，即

$$X(G)=X(G-V_{j+1})=3$$

（证毕）

关于G为非外可平面图的情况，先证定理4.

定理 4 设G'是最大外可平面图，G与G'同胚，则 $X(G)\leqslant X(G')=3$.

证明 据同胚的定义可知：从顶点的组成考察，同胚图的差异仅在于度为2的顶点数不同。

G' 是最大外可平面图，它存在一个平面嵌入，每个内部面均为三角形，显然，它不可能由非最大外可平面图 G 上增加度为 2 的附加顶点来得到。于是，与 G' 同胚的图 G 则总可视为是在 G' 的基础上，对 G' 的边进行剖分，即增加一些度为 2 的新顶点而得到。因为每个新增顶点度均为 2，不可能是 4 色图的临界点，故必有

$$X(G) \leqslant X(G') = 3$$

特别，当新点的增加导致新图 G 中不再存在奇圈时，则有

$$X(G) = 2 < X(G')$$

（证毕）

例如图 3 所示，$K_{2,3}$ 的色数为 2，它就是一个同胚于最大外可平面图（有两个内部面）之图。

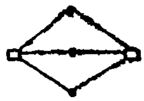


图 3

下面，我们证明3-可着色图的一个充分条件。如引言中所述，这是一个重要定理。

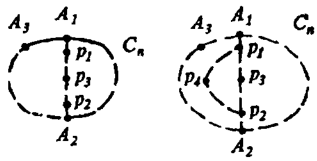
定理 5　若图 G 中不存在与 K_4 同胚的子图，则其色数 $X(G) \leqslant 3$.

证明　由定理 2 知，G 为可平面图。再由外可平面图存在的充要定理(文[2],定理 7.3.1)可知：可平面图 G 中不存在与 K_4 同胚的子图的情况只有两种。现分别讨论如下：

(1) G 为外可平面图。由定理 3 知：此时命题成立。

(2) G 不是外可平面图，但 G 中不存在与 K_4 同胚的子图，则 G 中必含与 $K_{2,3}$ 同胚的子图。在这种情况下，因 $K_{2,3}$ 与外可平面图同胚，与 $K_{2,3}$ 同胚的图必与外可平面图同胚。由定理 4 知：与 $K_{2,3}$ 同胚的子图均3-可着色，故命题亦成立。

这是因为：G 中不存在与 K_4 同胚的子图，故对于 G 中的每一个圈 C_n，C_n 上至多存在两个点，能够由互不交叉的道路与 C_n 外的同一点 P 相连，亦即：C_n 外一点 P 与 C_n 上任意三点相连的道路必交叉。于是，在 G 中，圈 C_n 与 C_n 外的点之间相连的基本情况只能如图 4 所示。其中，$A_i(i=1,2,3)$ 为 C_n 上不同三点；$P_j(j=1,2,3,4)$ 为 C_n 外的点。图 4 (b) 可视为在图 4 (a) 基础上增加一条连接 P_1 与 P_2 的道路 $P_1 \cdots P_4 \cdots P_2$ 而成（不妨设此新加道路长度$\geqslant 2$）。



(a)　　(b)

图 4

图 4 (a) 与 $K_{2,3}$ 同胚，是 3-可着色的；对于新增道路 $P_2 \cdots P_4 \cdots P_2$，无论两端点 P_1 与 P_2 是限定为同色还是异色，也不管此道路上的顶点数是奇数还是偶数，它总是 3-可着色的，于是，图 4 (b) 也必3-可着色。　　（证毕）

2　结　论

本文的结论，即

定理 1　若 G 中不存在与完全图 K_4 同胚的子图，且 G 中存在奇圈，则 G 是三色图。

证明　因 G 中不存在与 K_4 同胚的子图，由定理 5，$X(G) \leqslant 3$；又因 G 中存在奇圈，必有 $X(G) \geqslant 3$，综合即得 $X(G) = 3$.　　（证毕）

由图 5 可知，定理 1 的条件只是充分的，不是必要的。尽管如此，如图 6 所示这类由同胚于 $K_{2,3}$ 的图及外可平面图互相嵌套而成的任意复杂图形，定理 1 仍不失为一个有效的判别法则。

图 5

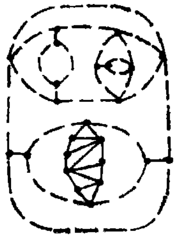


图 6

参 考 文 献

[1] F·哈拉里著；李慰萱译．图论．上海：科学技术出版社，1980

[2] 李慰萱．图论．湖南：科技出版社，1980

[3] 王朝瑞．图论（修订版）．北京工业学院出版社，1987：220

A Sufficient Condition for the 3- Chromatic Graph

Dong Xiaoguang

Abstract

The following theorem has been proved in this paper: "the chromatic number $X(G)\leqslant 3$ if the graph G has no subgraph homeomorphic to K_4", thus further getting a sufficient condition for the 3-chromatic graph. So long as the theorem similar to the above one: "the chromatic number $X(G)\leqslant 4$ if the graph G has no subgraph homeomorphic to K_5" can be proved, the famous "4 colour conjecture (4CC)" in the world will be confirmed.

Key words: graph theory, 3-chromatic graph, sufficient condition