国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第11卷第2期　1989年6月　Vol.11, No.2

分段线性凸费用网络流的两个算法*

谢　政

（系统工程与应用数学系）

摘　要　本文讨论了分段线性凸费用网络流问题，推广了线性费用网络流中的负回路方法和最小费用路方法，从而得到了求分段线性凸费用网络的最小费用流的两个算法。

关词键　运筹学，网络流图，算法；分段线性凸费用网络，可行流，最小费用流，负回路，最小费用路

分类号　F224.3，O233

引　言

大家知道，关于凸费用网络流问题有许多算法[1]。本文讨论了一类特殊的凸费用网络流——分段线性凸费用网络流，并给出了两个简单算法——负回路方法和最小费用路方法。

1　问题的描述

考虑一个有向网络$G=(N,A)$，N为顶点集，A为弧集，s为发点，t为收点。为叙述方便，假设：若$(i,j)\in A$，则$(j,i)\notin A$. 分段线性凸费用网络流问题是指

$$\min \sum_{(i,j)\in A} C_{ij}(x_{ij})$$

s.t.

$$\sum_j x_{ij}-\sum_j x_{ji}=\begin{cases} v, & i=s \\ 0, & i\neq s,t,\ i\in N \\ -v, & i=t \end{cases} \tag{1}$$

$0\leqslant x_{ij}\leqslant a_{ij}$，$(i,j)\in A$，

这里对一切$(i,j)\in A$，有

$$c_{ij}(x_{ij})=\begin{cases} c_{ij}^{(1)}\cdot x_{ij}, & 0=a_{ij}^{(0)}\leqslant x_{ij}\leqslant a_{ij}^{(1)}, \\ c_{ij}^{(1)}\cdot a_{ij}^{(1)}+c_{ij}^{(2)}\cdot(x_{ij}-a_{ij}^{(1)}) & a_{ij}^{(1)}\leqslant x_{ij}\leqslant a_{ij}^{(2)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \sum_{k=1}^{r_{ij}-1} c_{ij}^{(k)}\cdot(a_{ij}^{(k)}-a_{ij}^{(k-1)})+c_{ij}^{(r_{ij})}\cdot(x_{ij}-a_{ij}^{(r_{ij}-1)}), & a_{ij}^{(r_{ij}-1)}\leqslant x_{ij}\leqslant a_{ij}^{(r_{ij})}=a_{ij} \end{cases}$$

其中

$v, r_{ij}, a_{ij}^{(k)}(k=1,2,\cdots,r_{ij})$均为正整数，$c_{ij}^{(k)}(k=1,2,\cdots,r_{ij})$为非负实数，且

1987年11月8日收稿

*研究简报

$$a_{ij}^{(k-1)} < a_{ij}^{(k)} \quad k=1,2,\cdots,r_{ij}$$
$$c_{ij}^{(k-1)} < c_{ij}^{(k)} \quad k=1,2,\cdots,r_{ij}$$

不难知道，如果引进变量$y_{ij}^{(1)},\cdots,y_{ij}^{(r_{ij})}$，用$\sum_{k=1}^{r_{ij}} y_{ij}^{(k)}$代替$x_{ij}$，则(1)式等价于(2)式：

$$\min \sum_{(i,j)\in A} \sum_{k=1}^{r_{ij}} c_{ij}^{(k)} y_{ij}^{(k)}$$

s.t.

$$\sum_j \sum_{k=1}^{r_{ij}} y_{ij}^{(k)} - \sum_j \sum_{k=1}^{r_{ij}} y_{ji}^{(k)} = \begin{cases} v, & i=s \\ 0, & i\neq s,t, \\ -v, & i=t \end{cases} \qquad i\in N \tag{2}$$

$$0\leqslant y_{ij}^{(k)} \leqslant b_{ij}^{(k)} \quad k=1,2,\cdots,r_{ij},(i,j)\in A,$$

其中$b_{ij}^{(k)}=a_{ij}^{(k)}-a_{ij}^{(k-1)}$.

根据(2)式，我们构造网络$G_1=(N,A_1)$：

对任何$(i,j)\in A$，有r_{ij}条弧$(i,j)\in A_1$，依次记为

$$1(i,j),\ 2(i,j),\ \cdots,\ r_{ij}(i,j)$$

弧$k(i,j)$上的容量为$b_{ij}^{(k)}$，单位费用为$c_{ij}^{(k)}$，$k=1,2,\cdots,r_{ij}$．这样(2)式就化为(3)式：

$$\min \sum_{k(i,j)\in A_1} c_{ij}^{(k)} y_{ij}^{(k)}$$

s.t.

$$\sum_{\substack{j,k \\ k(i,j)\in A_1}} y_{ij}^{(k)} - \sum_{\substack{j,k \\ k(j,i)\in A_1}} y_{ji}^{(k)} = \begin{cases} v, & i=s \\ 0, & i\neq s,t, \\ -v, & i=t \end{cases} \qquad i\in N \tag{3}$$

$$0\leqslant y_{ij}^{(k)} \leqslant b_{ij}^{(k)},\ k(i,j)\in A_1$$

由文献[2]可知(2)式的最小费用流，从而(3)式的最小费用流也满足：

若$y_{ij}^{(k)}>0$，则$y_{ij}^{(l)}=b_{ij}^{(l)}$，$l=1,\cdots,k-1$； (4)

若$y_{ij}^{(k)}<b_{ij}^{(k)}$，则$y_{ij}^{(l)}=0$，$l=k+1,\cdots,r_{ij}$. (5)

2 主要定理

设$f=\{x_{ij}\mid(i,j)\in A\}$为(1)式的可行流，从而得到(3)式的可行流$f=\{y_{ij}^{(k)}\mid k(i,j)\in A_1\}$，满足(4)、(5)两式。令

$$A_1^+(f)=\{k(i,j)\mid k(i,j)\in A_1,\ 0\leqslant y_{ij}^{(k)}<b_{ij}^{(k)}\}$$
$$A_1^-(f)=\{k(i,j)\mid k(j,i)\in A_1,\ 0<y_{ji}^{(k)}\leqslant b_{ji}^{(k)}\}$$
$$\hat{A}_1(f)=A_1^+(f)\cup A_1^-(f)$$

于是，得到了网络$G_1=(N,A_1)$关于f的增量图$G_1(f)=(N,\hat{A}_1(f))$．并且对一切$k(i,j)\in\hat{A}_1(f)$，有

$$\hat{b}_{ij}^{(k)}=\begin{cases} b_{ij}^{(k)}-y_{ij}^{(k)}, & 若k(i,j)\in A_1^+(f) \\ y_{ji}^{(k)}, & 若k(i,j)\in A_1^-(f) \end{cases}$$

$$\hat{c}_{ij}^{(k)}=\begin{cases} c_{ij}^{(k)}, & 若k(i,j)\in A_1^+(f) \\ -c_{ji}^{(k)}, & 若k(j,i)\in A_1^-(f) \end{cases}$$

设φ为$G_1(f)$中有向回路，则

$$\varphi=\varphi^+\cup\varphi^-$$

其中$\varphi^+=\varphi\cap A_1^+(f)$，$\varphi^-=\varphi\cap A_1^-(f)$.

定义

$$f\oplus\varepsilon\varphi=\begin{cases} y_{ij}^{(k)}+\varepsilon, & 若k(i,j)\in\varphi^+ \\ y_{ij}^{(k)}-\varepsilon, & 若k(j,i)\in\varphi^- \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

其中$0\leqslant\varepsilon\leqslant\min\limits_{k(i,j)\in\varphi} b_{ij}^{(k)}$. 如果

$$\sum_{k(i,j)\in\varphi}\hat{c}_{ij}^{(k)}<0$$

则称φ是$G_1(f)$中的负回路。

对$G_1(f)$中任何有向路P，同样有

$$P=P^+\cup P^-$$

其中$P^+=P\cap A_1^+(f)$，$P^-=P\cap A_1^-(f)$.

类似地定义$f\oplus\varepsilon P$.

设$\boldsymbol{P}=\{P\mid P是G_1(f)中从s到t的有向路\}$，$P^*\in\boldsymbol{P}$，若

$$\sum_{k(i,j)\in P^*}\hat{c}_{ij}^{(k)}=\min_{P\in\boldsymbol{P}}\sum_{k(i,j)\in P}\hat{c}_{ij}^{(k)},$$

则称P^*是$G_1(f)$中最小费用路。

由于(3)式是线性费用网络流问题，因此关于负回路方法和最小费用路方法有以下两个定理[3]。

定理 1 设f是(1)式的可行流，则f为(1)式的最小费用流的充要条件是$G_1(f)$中不存在负回路。

定理 2 设f是(3)式中流值为v（非负整数）且各弧流均为非负整数的最小费用流，如果P^*是$G_1(f)$中最小费用路，则$f\oplus P^*$是G的流值为$(v+1)$的最小费用流。

对于(1)式的可行流$f=\{x_{ij}\mid(i,j)\in A\}$，构造网络$G=(N,A)$关于$f$的增量图$G(f)=(N,\hat{A}(f))$：

$$A^+(f)=\{(i,j)\mid(i,j)\in A,\ 0\leqslant x_{ij}<a_{ij}\}$$
$$A^-(f)=\{(i,j)\mid(j,i)\in A,\ 0<x_{ji}\leqslant a_{ji}\}$$
$$\hat{A}(f)=A^+(f)\cup A^-(f)$$

对于$(i,j)\in A^+(f)$，$a_{ij}^{(k-1)}\leqslant x_{ij}<a_{ij}^{(k)}$，$1\leqslant k\leqslant r_{ij}$，取

$$\hat{a}_{ij}=a_{ij}^{(k)}-x_{ij},\quad \hat{c}_{ij}=c_{ij}^{(k)};$$

对于$(i,j)\in A^-(f)$，$a_{ji}^{(k-1)}<x_{ji}\leqslant a_{ji}^{(k)}$，$1\leqslant k\leqslant r_{ji}$，取

$$\hat{a}_{ij}=x_{ji}-a_{ji}^{(k-1)},\quad \hat{c}_{ij}=-c_{ji}^{(k)}.$$

对于$G(f)$中任何有向路P，有向回路φ，有

$$P=P^{+}\cup P^{-},\ \varphi=\varphi^{+}\cup\varphi^{-},$$

这里$P^{+}=P\cap A^{+}(f)$，$P^{-}=P\cap A^{-}(f)$，$\varphi^{+}=\varphi\cap A^{+}(f)$，$\varphi^{-}=\varphi\cap A^{-}(f)$.

在$G(f)$中，完全类似地定义$f\oplus\varepsilon P$，$f\oplus\varepsilon\varphi$及负回路、最小费用路。

引理 1　设$f=\{x_{ij}|(i,j)\in A\}$为(1)式的可行流，则增量图$G(f)$中存在负回路的充要条件是$G_1(f)$中存在负回路。

证明　必要性。若φ为$G(f)$中的负回路，由于(3)式的可行流$f=\{y_{ij}^{(k)}|k(i,j)\in A_1\}$满足(4)、(5)两式，故$G(f)$是$G_1(f)$的生成子网络，所以$\varphi$亦是$G_1(f)$的负回路。

充分性。设

$$\hat{\varphi}=\{l_{i_1i_2}(i_1,i_2),\ l_{i_2i_3}(i_2,i_3),\ \cdots,\ l_{i_mi_1}(i_m,i_1)\}$$

是$G_1(f)$中负回路．$\hat{\varphi}=\hat{\varphi}^{+}\cup\hat{\varphi}^{-}$，则

$$\sum_{l_{ij}(i,j)\in\hat{\varphi}}\hat{c}_{ij}^{(l_{ij})}=\sum_{l_{ij}(i,j)\in\hat{\varphi}^{+}}c_{ij}^{(l_{ij})}-\sum_{l_{ij}(i,j)\in\hat{\varphi}^{-}}c_{ji}^{(l_{ij})}<0$$

若$l_{ij}(i,j)\in\hat{\varphi}^{+}$，则$0\leqslant y_{ij}^{(l_{ij})}<b_{ij}^{(l_{ij})}$，因为$f=\{y_{ij}^{(k)}|k(i,j)\in A_1\}$满足(5)式，即

$$y_{ij}^{(k)}=0,\ k=l_{ij}+1,\ \cdots,\ r_{ij}$$

所以

$$x_{ij}=\sum_{k=1}^{l_{ij}}y_{ij}^{(k)}<\sum_{k=1}^{l_{ij}}b_{ij}^{(k)}=a_{ij}^{(l_{ij})}$$

设$a_{ij}^{(p_{ij}-1)}\leqslant x_{ij}<a_{ij}^{(p_{ij})}$．从而$p_{ij}\leqslant l_{ij}$，即知$G(f)$中存在弧$(i,j)$，并且$\hat{c}_{ij}=c_{ij}^{(p_{ij})}\leqslant c_{ij}^{(l_{ij})}=\hat{c}_{ij}^{(l_{ij})}$．

若$l_{ij}(i,j)\in\hat{\varphi}^{-}$，则$0<y_{ji}^{(l_{ij})}\leqslant b_{ji}^{(l_{ij})}$，由于$f=\{y_{ij}^{(k)}|k(i,j)\in A_1\}$满足(4)式，即

$$y_{ji}^{(k)}=b_{ji}^{(k)},\ k=1,\cdots,l_{ij}-1$$

因此

$$a_{ji}^{(l_{ij}-1)}=\sum_{k=1}^{l_{ij}-1}b_{ji}^{(k)}<\sum_{k=1}^{r_{ij}}y_{ji}^{(k)}=x_{ji}$$

设$a_{ji}^{(q_{ij}-1)}<x_{ji}\leqslant a_{ji}^{(q_{ij})}$，于是$q_{ij}-1\geqslant l_{ij}-1$，即$q_{ij}\geqslant l_{ij}$，从而$G(f)$中存在弧$(i,j)$，且$\hat{c}_{ij}=-c_{ji}^{(q_{ij})}\leqslant -c_{ji}^{(l_{ij})}=\hat{c}_{ij}^{(l_{ij})}$．

于是

$$\bar{\varphi}=\{(i_1,i_2),\ (i_2,i_3),\ \cdots,\ (i_m,i_1)\}$$

是$G(f)$中的有向回路，且$\sum_{(i,j)\in\bar{\varphi}}\hat{c}_{ij}\leqslant\sum_{l_{ij}(i,j)\in\hat{\varphi}}\hat{c}_{ij}^{(l_{ij})}<0$，即知$\bar{\varphi}$为$G(f)$中负回路。

由定理1及引理1得到

定理 3　设f为(1)式的可行流，则f为(1)式的最小费用流的充要条件是增量图$G(f)$中不存在负回路。

引理 2　设f是(1)式中流值为v（非负整数）的可行流，若P是增量图$G(f)$中的

最小费用路，则P是增量图$G_1(f)$中的最小费用路。

证明　注意到，网络G_1中流值为v的可行流$f=\{y_{ij}^{(k)} \mid k(i,j)\in A_1\}$满足(4)，(5)两式，故$G(f)$是$G_1(f)$的生成子网络，所以$P$也是$G_1(f)$中从$s$到$t$的有向路。

设Q为$G_1(f)$中的最小费用路，则

$$\sum_{l_{ij}(i,j)\in Q} \hat{c}_{ij}^{(l_{ij})} \leqslant \sum_{l_{ij}(i,j)\in P} \hat{c}_{ij}^{(l_{ij})} \tag{6}$$

用引理1中同样方法，根据$G_1(f)$中最小费用路Q可找到$G(f)$中从s到t的有向路$\hat{Q}$满足

$$\sum_{(i,j)\in\hat{Q}} \hat{c}_{ij} \leqslant \sum_{l_{ij}(i,j)\in Q} \hat{c}_{ij}^{(l_{ij})} \tag{7}$$

又因P是$G(f)$中最小费用路，故

$$\sum_{(i,j)\in P} \hat{c}_{ij} \leqslant \sum_{(i,j)\in\hat{Q}} \hat{c}_{ij} \tag{8}$$

由(6)、(7)、(8)三式知

$$\sum_{l_{ij}(i,j)\in P} \hat{c}_{ij}^{(l_{ij})} = \sum_{l_{ij}(i,j)\in Q} \hat{c}_{ij}^{(l_{ij})}$$

因此P亦是$G_1(f)$中最小费用路。

由定理2及引理2立即得到

定理4　设f是(3)式中流值为v（非负整数）且各弧流均为非负整数的最小费用流，如果P是增量图$G(f)$中最小费用路，则$f\oplus P$是(3)式的流值为$(v+1)$的最小费用流。

3　算　法

线性费用网络流的负回路方法、最小费用路方法是分别由定理1、定理2得到的，类似地，我们利用定理3、定理4亦可给出分段线性凸费用网络流问题的负回路方法和最小费用路方法。

由定理3得到负回路方法：

step 0　从零流开始，采用最大流标号法找出(1)式的可行流f，转step 1；若(1)式无可行流，则无最小费用流，停止。

step 1　按第2节中方法构造增量$G(f)$.

step 2　检查$G(f)$中是否存在负回路，若有，转step 3；否则，停止，此时f为(1)式的最小费用流。

step 3　在$G(f)$中找一个负回路φ，设$\delta=\min\limits_{(i,j)\in\varphi} \hat{a}_{ij}$，求$f\oplus\delta\varphi$，用$f\oplus\delta\varphi$代替$f$，转step 1.

由定理4得到最小费用路方法：

step 0　以零流作为初始流 f.

step 1　按第 2 节中方法构造增量图 $G(f)$.

step 2　检查 $G(f)$ 中是否存在从 s 到 t 的有向路，若无，停止，方程(1)无可行流；否则转step 3.

step 3　在 $G(f)$ 中寻找最小费用路 P，设 $\delta = \min\limits_{(i,j)\in P} a_{ij}$.

step 4

(1)　若 $f\oplus\delta P$ 的流值小于 v，则置 $f=f\oplus\delta P$，转step1；

(2)　若 $f\oplus\delta P$ 的流值等于 v，停止，此时 $f\oplus\delta P$ 为(1)式的最小费用流；

(3)　若 $f\oplus\delta P$ 的流值 h 大于 v，停止，此时 $f\oplus(\delta-h+v)P$ 就是(1)式的最小费用流。

两个算法中我们并未给出在增量图 $G(f)$ 中求负回路、最小费用路的具体步骤。关于求负回路、最小费用路的方法，一般的网络图论书籍中都有详尽的描述，可参考有关文献。

同文献[1]中给出的算法相比，这里的两个算法具有简单、直观、易行的特点，而且，分段线性凸费用函数的段数愈多，它们愈显得比其它算法更为有效。

本文是在陈庆华老师的指导下完成的。

参 考 文 献

[1] Ahuja P K, Batra J L and Gupta S K. A Parametric Algoithm for Convex Cost Network Flow and Related Problems. Eurpen Journal of C R, 1984; 16: 222~235

[2] Murty K G. Linear and Combinatorial Programming. New York: John Wiley, 1976

[3] Busacker R G and Saaty T L. Finite Graphs and Networks. New York: McGraw-Hall, 1965

Two Algorithms for Piecewise-Linear Convex Cost Network Flow Problems

Xie Zheng

Abstract

In this paper, the piecewise-linear convex cost network flow is discussed. The methods of the negative circuit and the shortest cost path for the linear cost network flow problems are extended, thus obtaining two simple algorithms to solve the minimum cost network flow problem with piecewise-linear convex cost.

Key words: operations research, network flows, algorithms; piecewise-linear convex cost network flow, feasible flow, minimum cost flow, negative circuit, shortest cost path

火炮随动系统动态参数测试系统填补国内空白和达到国际先进水平

我校精密机械与仪器系研制的火炮随动系统动态参数测试系统于1988年12月5日在长沙通过部委级鉴定。与会专家们认为，该系统技术先进，软件丰富，功能齐全，达到了当前国际水平，居国内领先地位。该系统的研制成功对实现我军兵器试验测试自动化向前迈进了一大步，填补了我国在兵器研制和试验领域中的一项空白。

火炮随动系统动态参数测试系统具有数据采集、射击控制、图形绘制与显示、数据打印、汉字制表汇总、模拟信号纪录、频谱分析等多种功能。系统综合应用了数据采集技术、信号处理与控制技术、计算机技术、图形技术和抗干扰技术，成为各种火炮进行定型试验时的强有力测试手段。它不仅测试精度高，而且将大大缩短了火炮试验周期。其测试精度比原振子示波器方法提高一个数量级，工作效率提高了200倍以上。它的使用从根本上改变了我军火炮研制的测试方法，对实现国防现代化具有重要的实际意义。

鉴定会上，专家们对这一成果给予了高度评价，认为：该系统具有独创性，是一项开拓性的科研成果。它在设计思想上既考虑了我军兵器发展的远景，又充分注意到了目前我国的国情，是一个现代数据采集和测量系统，具有80年代国际先进水平。

（梁滨）