

## 弹性压杆稳定性的一般表达式

卓 曙 君

(航天技术系)

**摘 要** 本文推导出等截面弹性压杆稳定性的一般表达式。17种在各种边界条件下的弹性压杆的临界压力计算公式均是它的特殊情况。

**关键词** 结构力学, 杆件, 柱, 稳定性, 弹性屈曲, 临界压力

**分类号** TV 311.2

杆是工程中最常用的构件之一。在飞机、导弹、船舶、桥梁等工程结构中有许多受压的构件。压杆的稳定性问题历来是工程设计中重要的一个问题。关于弹性压杆临界压力的计算公式在一般弹性稳定性著作中均有叙述,但都是根据每一具体的边界条件进行各别推导<sup>[1],[2],[3]</sup>。文[4]在梁的两端引入不同的弹簧刚度系数  $K_1$ 、 $K_2$  (产生每单位位移所需的力) 或不同的弹性固持座的刚性系数  $\bar{K}_1$ 、 $\bar{K}_2$  (产生每单位转角所需的力值), 推导出梁的横向振动频率方程的一般表达式。本文把文[4]的思路, 应用到结构稳定性问题中, 推导出弹性压杆稳定性的一般表达式。而17种在各种边界条件下的弹性压杆的临界压力计算公式均是它的特殊情形。

## 1 弹性压杆稳定性的一般表达式

如图1所示, 等截面弹性压杆两端的弹簧刚度系数和弹性固持座的刚度系数分别为  $K_1$ 、 $\bar{K}_1$  和  $K_2$ 、 $\bar{K}_2$ 。

分析压杆弹性稳定性时, 需要应用4阶微分方程:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + P \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad (1)$$

式中  $EI$  为杆的弯曲刚度,  $P$  为轴向压力。

引入  $\alpha^2 = \frac{P}{EI}$  (2)

(1)式可写为  $y^{(4)} + \alpha^2 y'' = 0$  (3)

齐次方程(3)的一般解为

$$y(x) = C_0 + C_1 \alpha x + C_2 (1 - \cos \alpha x) + C_3 (\alpha x - \sin \alpha x) \quad (4)$$

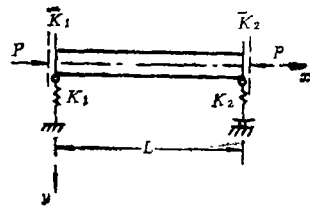


图 1

端点条件为

$$\left. \begin{aligned} x=0, y(0) &= \frac{1}{\bar{K}_1} [EIy'''(0) + Py'(0)], y''(0) = \frac{\bar{K}_1}{EI} y'(0) \\ x=L, y(L) &= \frac{1}{\bar{K}_2} [EIy'''(L) + Py'(L)], y''(L) = -\frac{\bar{K}_2}{EI} y'(L) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

将(4)式及其一阶、二阶、三阶、四阶导数式代入式(5), 整理后写成矩阵形式为:

$$\begin{bmatrix} K_1 & -(EI\alpha^2)\alpha & 0 & -EI\alpha^3 \\ 0 & \bar{K}_1\alpha & -(EI\alpha^2) & 0 \\ K_2 & \alpha L K_2 - (EI\alpha^2)\alpha & (1 - \cos\alpha L)K_2 & K_2(\alpha L - \sin\alpha L) - (EI\alpha^2)\alpha \\ 0 & \bar{K}_2\alpha & \bar{K}_2\alpha \sin\alpha L + (EI\alpha^2)\cos\alpha L & \bar{K}_2\alpha(1 - \cos\alpha L) + (EI\alpha^2)\sin\alpha L \end{bmatrix} \cdot [C_0 \ C_1 \ C_2 \ C_3]^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (6)$$

这是一组关于四个待定常数  $C_0$ 、 $C_1$ 、 $C_2$  和  $C_3$  的线性联立方程组, 要使(6)式中的  $C_0$ 、 $C_1$ 、 $C_2$  和  $C_3$  有非零解, 系数行列式必为零。展开简化后得等截面弹性压杆稳定性的一般表达式为:

$$\begin{aligned} & K_1 K_2 \bar{K}_1 \bar{K}_2 \alpha^2 A + K_1 K_2 (\bar{K}_1 + \bar{K}_2) \alpha B + \bar{K}_1 \bar{K}_2 (K_1 - K_2) \alpha^3 C \\ & + (K_1 \bar{K}_1 + K_1 \bar{K}_2 - K_2 \bar{K}_1 - K_2 \bar{K}_2) \alpha^2 D + K_1 K_2 F \\ & + (K_2 - K_1) \alpha G = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} A &= 2(1 - \cos\alpha L) - \alpha L \sin\alpha L, \quad B = (EI\alpha^2)(\sin\alpha L - \alpha L \cos\alpha L) \\ C &= (EI\alpha^2)\sin\alpha L, \quad D = (EI\alpha^2)^2 \cos\alpha L \\ F &= (EI\alpha^2)^2 \alpha L \sin\alpha L, \quad G = (EI\alpha^2)^3 \sin\alpha L \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

弹簧刚度系数  $K$  在自由端和简支端的情形下分别取值为 0 和  $\infty$ ; 弹性固持座的刚度系数  $\bar{K}$  在简支端和固持座的情形下分别取值为 0 和  $\infty$ , 如表 1 所示。

表 1  $K$  及  $\bar{K}$  值在不同支承条件下取值范围

刚度系数类别	支 承 条 件			弹性支承
	自由	简支	固持	
$K$	0	$\infty$	$\infty$	$0 < K < \infty$
$\bar{K}$	0	0	$\infty$	$0 < \bar{K} < \infty$

## 2 各种边界条件下弹性压杆的临界压力计算公式

由式(7)可推得在各种边界条件下的临界压力计算公式。

(1) 两端具有不同的弹簧支承(图2)。

此时,  $\bar{K}_1 = \bar{K}_2 = 0$ , (7)式可简化为

$$K_1 K_2 F + (K_2 - K_1) \alpha G = 0 \quad (9)$$

将(8)式代入上式, 整理后得

$$\left[ K_1 K_2 + (K_2 - K_1) \frac{EI\alpha^2}{L} \right] (\alpha L) \sin \alpha L = 0 \quad (10)$$

若  $\sin \alpha L = 0$ ,  $\alpha L = n\pi$ , 取  $n=1$ , 得

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (11)$$

若  $K_1 K_2 + (K_2 - K_1) \frac{EI\alpha^2}{L} = 0$ , 得

$$P_E = \frac{K_1 K_2 L}{K_1 - K_2} \quad (12)$$

从(11)、(12)式中取小值, 即为两端具有不同弹簧支承压杆的临界压力值。

(2) 两端具有相同的弹簧支承

此时,  $\bar{K}_1 = \bar{K}_2 = 0$ ,  $K_1 = K_2 = K$ 。可见(10)式依然成立。由于  $K_1 = K_2 = K$ , (12)式的分母为零,  $P_E$ 将趋于无限大。临界压力公式仅存(11)式, 这与两端简支情形相同。

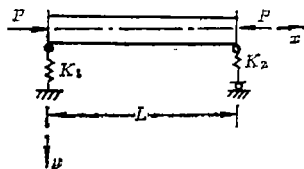


图 2

(3) 两端具有不同弹性固持座 (图 3)

此时,  $K_1 = K_2 = \infty$ , 将  $K_1 K_2$  除(7)式, 得:

$$\bar{K}_1 \bar{K}_2 \alpha^2 A + (\bar{K}_1 + \bar{K}_2) \alpha \beta + F = 0 \quad (13)$$

将(8)式代入上式, 并令

$$\alpha L = 2u, \quad u = \frac{\alpha L}{2} = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \quad (14)$$

则(13)式可写为

$$\begin{aligned} & \bar{K}_1 \bar{K}_2 (\sin^2 u - u \sin u \cos u) + (\bar{K}_1 + \bar{K}_2) EI \left( \frac{u}{L} \right) (\sin u \cos u - u + 2u \sin^2 u) \\ & + 4(EI)^2 \left( \frac{u}{L} \right)^2 u \sin u \cos u = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

(4) 两端具有相同弹性固持座

此时,  $K_1 = K_2 = \infty$ ,  $\bar{K}_1 = \bar{K}_2 = \bar{K}$ , (15)式可改写为:

$$\begin{aligned} & \bar{K}^2 (\sin^2 u - u \sin u \cos u) + 2\bar{K} EI \left( \frac{u}{L} \right) (\sin u \cos u - u + 2u \sin^2 u) \\ & + 4(EI)^2 \left( \frac{u}{L} \right)^2 u \sin u \cos u = 0 \end{aligned}$$

或

$$\left( \sin u + \frac{2EI}{\bar{K}L} u \cos u \right) \left( \frac{4EI}{\bar{K}L} u^2 \sin u + 2 \sin u - 2u \cos u \right) = 0 \quad (16)$$

由  $\sin u + \frac{2EI}{\bar{K}L} u \cos u = 0$ , 得

$$\operatorname{tgu} = -\frac{2EI}{\bar{K}L}u \quad (17)$$

由  $\frac{4EI}{\bar{K}L}u^2 \sin u + 2\sin u - 2u \cos u = 0$ , 得

$$\operatorname{tgu} = \frac{u}{1 + \frac{2EI}{\bar{K}L}u^2} \quad (18)$$

(17)式的最小根  $u_{\min} < \pi$ ; (18)式的  $u_{\min} > \pi$ . 所以应取(17)式。

(5) 一端弹性固持, 一端固持 (图4)

此时,  $K_1 = K_2 = \infty$ ,  $\bar{K}_1 = \bar{K}$ ,  $\bar{K}_2 = \infty$ . 将  $\bar{K}_2$  除(15)式, 整理后得:

$$\bar{K} \sin u (\sin u - u \cos u) - EI \left( \frac{u}{L} \right) \frac{1}{2} (2u \cos 2u - \sin 2u) = 0$$

$$\text{即 } \left( \frac{2\sin u}{u} \right) \left( \frac{\sin u - u \cos u}{2u \cos 2u - \sin 2u} \right) = \frac{EI}{\bar{K}L} \quad (19)$$

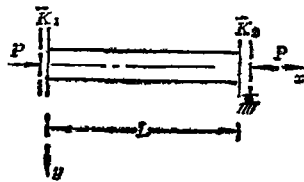


图3

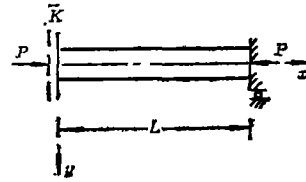


图4

为说明等截面弹性压杆稳定性一般表达式(7)的具体应用, 推导了以上5种特殊情况。它们都是其它文献中没有或是推导过程较繁的。为节省篇幅起见, 其它情况不再一一推导。具体结果列于表2。附图可参见文[4]。

表2 各种弹性支承情况的临界压力计算公式

编号	支承情况	$\bar{K}_1$	$\bar{K}_2$	$K_1$	$K_2$	公式
(6)	一端简支, 一端 弹簧支承	0	0	$\infty$	$K$	$P_E = KL$ 或 $P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ , 取小者 (20)
(7)	两端简支	0	0	$\infty$	$\infty$	$\sin \alpha L = 0$ , $P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ (21)
(8)	两端固持	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\operatorname{tgu} = 0$ , $P_E = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$ (对称屈曲型) 或 $\operatorname{tgu} = u$ (反对称屈曲型) (22)
(9)	一端固持, 一端简支	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$	$\operatorname{tg} 2u = 2u$ , $P_E = 20.196 \frac{EI}{L^2}$ (23)
(10)	一端弹性固持, 一端简支	$\bar{K}$	0	$\infty$	$\infty$	$\operatorname{tg} 2u = \frac{2u}{1 + \frac{PL}{\bar{K}}}$ (24)

$$(11) \quad \begin{array}{l} \text{一端弹性固持,} \\ \text{一端弹簧支承} \end{array} \quad \bar{K} \quad 0 \quad \infty \quad K \quad \lg 2u = \frac{2u}{\frac{PL}{\bar{K}} + \frac{1}{1 - \frac{P}{KL}}} \quad (25)$$

$$(12) \quad \begin{array}{l} \text{悬臂杆} \end{array} \quad \infty \quad 0 \quad \infty \quad 0 \quad \begin{array}{l} \cos \alpha L = 0, \quad n = 1, 3, \dots, \quad P_E = -\frac{\pi^2 EI}{4L^2} \\ \alpha L = \frac{n\pi}{2}, \end{array} \quad (26)$$

$$(13) \quad \begin{array}{l} \text{一端弹性固持,} \\ \text{一端自由} \end{array} \quad \bar{K} \quad 0 \quad \infty \quad 0 \quad \lg 2u = \frac{2\bar{K}u}{PL} \quad (27)$$

$$(14) \quad \begin{array}{l} \text{一端固持, 一端} \\ \text{弹簧支承} \end{array} \quad \infty \quad 0 \quad \infty \quad K \quad \lg 2u = 2u \left( 1 - \frac{P}{KL} \right) \quad (28)$$

$$(15) \quad \begin{array}{l} \text{一端简支, 一端} \\ \text{自由} \end{array} \quad 0 \quad 0 \quad \infty \quad 0 \quad \text{可动机构}$$

$$(16) \quad \begin{array}{l} \text{一端弹簧支承,} \\ \text{一端自由} \end{array} \quad 0 \quad 0 \quad K \quad 0 \quad \text{可动机构}$$

$$(17) \quad \begin{array}{l} \text{两端自由} \end{array} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \text{可动机构}$$

### 参 考 文 献

- [1] Stephen P. Timoshenko, James M. Gere. Theory of Elastic Stability, Second Edition. New York: Mc GRAW-HILL Book Company, Inc, 1961, 46~50
- [2] 耶·依·考洛特金等. 陈铁云等译. 杆件与杆系之弯曲及稳定性, 第1版. 北京: 高等教育出版社, 1955. 381~387, 448~450
- [3] 周承侗. 弹性稳定理论, 第1版. 成都: 四川人民出版社, 1981, 50~56, 62~67
- [4] 卓曙君, 葛玉君. 国防科技大学学报, 1988, 10(3)

## The General Expression for the Stability of Elastic Compressed Bars

Zhuo Shujun

(Department of Aerospace Technology)

### Abstract

The general expression for the stability of straight elastic compressed bars with constant cross section is derived in this paper. Seventeen equations for calculating the critical load of elastic compressed bars under various supporting conditions are all its special cases.

Key words: structural mechanics, bar, column, stability, elastic buckling, critical load