国 防 科 技 大 学 学 报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第13卷第1期　1991年3月　Vol.13 No.1

用逆推法进行平面复杂机构的运动分析

潘存云　杨昂岳
（精密机械与仪器系）

摘　要　本文依据相对运动不变性原理，提出了一种可用于平面复杂机构运动分析的有效方法——递推法。本方法可用来绘制机构运动简图以及推导机构运动参数之间的解析表达式。经计算机仿真证明：逆推法是正确而有效的。

关键词　分析，运动学，平面机构
分类号　TH112

1　问题的提出

从机构学的观点来看，对已知平面机构进行运动分析时往往要解决两方面的问题：首先，根据给定机构的几何与结构参数（如构件长度、构件数、运动副类型及数目等）绘制机构运动简图；其次，根据给定的运动条件，求解从动构件上某些特殊点的运动参数，如位置、轨迹、速度和加速度等。现有的机构运动简图的绘制方法，是先给定原动件的位置，然后依次找出其余从动件的位置。对于绝大多数机构而言，这种方法是有效的，但对于一些复杂的平面多杆多环机构，如图1所示的单自由度步行腿机构，用传统的方法画不出其机构运动简图。另一方面，如果给定原动件的位置和角速度，要求出该机构其余从动件的运动参数，按从原动件起依次往后分析的思路，则不能导出从动件运动参数与原动件运动参数之间的显式函数关系式，而这种显示的函数关系式在计算机机构运动仿真时，对于快速计算从动件的运动参数是非常必要的。由此可知：提出一种解决此类平面复杂机构运动分析的有效方法，无论是对机构学理论的发展，还是为满足解决实际问题的需要，都具有明显的现实意义。本文以国家自然科学基金项目《移动机构及全方位步行机构的研究》课题为背景，通过对机器人步行腿机构的研究，提出了一种解决此类平面复杂机构运动分析的有效方法——逆推法。

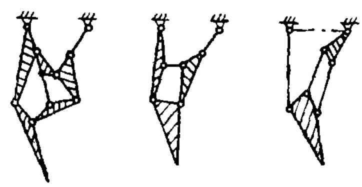
(a)　(b)　(c)

图1　三种步行腿机构

2　逆推法的基本原理

由理论力学可知：两个作机械运动的物体，在不同的参考系观察它们，具有不同的

国家自然科学基金资助项目
1990年2月13日收稿

运动，但它们的相对运动关系确是固定不变的，这就是著名的相对运动不变性原理。逆推法就是根据这一理论依据提出的。我们知道，在对单自由度的平面机构进行位置分析时，只要给定原动件相对于机架的位置，那么，其余从动件的位置也就随之确定，这就是传统的分析方法。其实，由相对运动不变性原理可知：各构件之间的相对运动关系是确定的，即各构件之间的位置有一一对应的关系，这种对应关系与先给定哪两个构件的位置无关。因此,如果给定机构中某两个从动构件的相对位置,反之也能确定原动构件和其余从动件的位置。本文阐述的逆推法即是按此思路提出的，其基本原理可叙述如下：先假设某两个相邻从动构件的相对位置是已知的，以此为基础，依次求出其余从动件的相对位置，最后求出原动件的相对位置，之后，将这些相对位置变换到机架坐标系，即可求得各构件相对于机架的位置。位置分析完成之后，速度分析和加速度分析可按一般方法进行。因为这种分析方法与传统分析方法的次序正好相反，故称之为“逆推法”。该法可用于求作机构运动简图和机构的位置分析。求作机构运动简图时，其步骤如下：

（1）将原机构分解成若干个独立的闭合环路，找出其中的一个四构件闭合环；

（2）按比例画出该环路中的任一构件，然后按任意相对位置画出与之相邻两构件中的任一构件；

（3）用作图法依次求出其余构件的位置；

（4）若原动件的位置不存在，则改变初始两杆的相对位置，重复步骤(2)，否则结束。

用逆推法进行机构位置分析时步骤如下：

（1）选择四构件闭合环中的某一构件作为假想机架；

（2）给定与其相邻构件之一的位置；

（3）用一般方法（如矢量法）分析其余构件的角位置；

（4）判别原动件位置是否存在，若不存在，则改变相邻杆与假想机架的相对位置，转(2)；否则转(5)；

（5）将所有构件的角位置从假想机架变换到真实机架。

位置分析完成后，速度和加速度分析可按一般方法进行。

3 应用实例

图 2 所示为机器人步行腿机构，该机构为一单自由度平面八杆机构，具有三个独立的闭合环，各构件的尺寸均为已知(具体数据略)。该机构用传统方法求不出其机构运动简图，而且得不到从动件位置的解析解。用本文提出的逆推法分析时可以满意地解决这两方面的问题。

3.1 求作机构运动简图

该机构有一个四杆环和两个五杆环，分别如图2(b),(c),(d)所示，先从四杆环开始作图，选择其中构件 3 和构件 4 （也可任选相邻两杆）作为两起始构件，任意给定其相对位置，按作图法依次求出其余构件的位置，即可得到该机构的运动简图（具体作图过程略），如图2(a)所示。

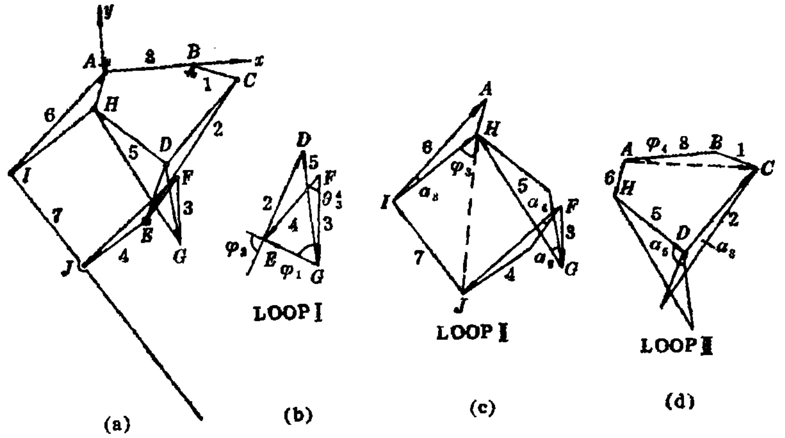

图 2

3.2 位置分析

上述机器人的步态取决于腿机构足端相对于机架的轨迹曲线，因此，该机构位置分析的目的就是要求出足端的运动轨迹。

选取坐标系如图2(a)所示，并将各构件以矢量形式表示。不妨选构件4作为假想机架，并把它作为矢量投影轴；假设构件3相对于构件4的转角θ_3^4是已知的。在环LOOPⅠ中作辅助向量$\overrightarrow{GE}$，则由图2(b)可得：

$$\theta_5^4=\theta_{GE}^4-\varphi_1 \tag{1}$$

$$\theta_2^4=\theta_{GE}^4-(\pi-\varphi_2) \tag{2}$$

其中φ_1,φ_2可由$\triangle GDE$解得，有

$$\varphi_1=\arccos[(GD^2+GE^2-DE^2)/(2\cdot GE\cdot GD)]$$

$$\varphi_2=\arccos[(GD^2-GE^2-DE^2)/(2\cdot GE\cdot DE)]$$

由$\triangle GEF$可求得：

$$\theta_{GE}^4=\mathrm{arctg}[-FG\cdot\sin\theta_3^4/(EF-FG\cdot\cos\theta_3^4)]$$

$$GE=[FG^2+EF^2-2FG\cdot EF\cdot\cos\theta_3^4]^{1/2}$$

在环LOOPⅡ中作辅助向量$\overrightarrow{JH}$，由图2(c)可得：

$$\theta_6^4=\theta_{JH}^4-\varphi_3 \tag{3}$$

其中φ_3可由$\triangle HIJ$求得，有

$$\varphi_3=\arccos[(JH^2+HI^2-IJ^2)/(2JH\cdot HI)]$$

θ_{JH}^4 可由如下投影方程：

$$\begin{cases}JH\cdot\sin\theta_{JH}^4=FG\cdot\sin\theta_3^4+GH\cdot\sin(\theta_5^4+\alpha_6)-FJ\cdot\sin\alpha_4\triangleq A_1\\ JH\cdot\cos\theta_{JH}^4=FG\cdot\cos\theta_3^4+GH\cdot\cos(\theta_5^4+\alpha_6)-FJ\cdot\cos\alpha_4\triangleq B_1\end{cases}$$

求得，有

$$JH=(A_1^2+B_1^2)^{\frac{1}{2}},\quad \theta_{JH}^4=\mathrm{arctg}(A_1/B_1)$$

θ_7^4 可由如下投影方程：

$$\begin{cases} IJ\cdot\sin\theta_7^4=JH\cdot\sin\theta_{JH}^4-HI\cdot\sin\theta_6^4\triangleq A_2 \\ IJ\cdot\cos\theta_7^4=JH\cdot\cos\theta_{JH}^4-HI\cdot\cos\theta_6^4\triangleq B_2 \end{cases}$$

求得，有

$$\theta_7^4=\mathrm{arctg}(A_2/B_2) \tag{4}$$

在环LOOPⅡ中作辅助向量$\overrightarrow{AC}$，若曲柄1位于机架的下方时，有

$$\theta_8^4=\theta_{AC}^4+\varphi_4 \tag{5}$$

其中φ_4可由$\triangle ABC$求得，有

$$\varphi_4=\arccos[(AB^2+AC^2-BC^2)/(2\cdot AC\cdot AB)]$$

θ_{AC}^4 可由以下投影方程：

$$\begin{cases} AC\cdot\sin\theta_{AC}^4=CD\cdot\sin(\theta_2^4-\alpha_3-\pi)+DH\cdot\sin(\theta_5^4-\alpha_5)+HA\cdot\sin(\theta_6^4-\alpha_7)\triangleq A_3 \\ AC\cdot\cos\theta_{AC}^4=CD\cdot\cos(\theta_2^4-\alpha_3-\pi)+DH\cdot\cos(\theta_5^4-\alpha_5)+HA\cdot\cos(\theta_6^4-\alpha_7)\triangleq B_3 \end{cases}$$

求得，有

$$AC=(A_3^2+B_3^2)^{\frac{1}{2}},\quad \theta_{AC}^4=\mathrm{arctg}(A_3/B_3)$$

当满足$AB-BC\leqslant AC\leqslant AB+BC$时，则机构位形存在，且$\theta_1^4$ 可由以下投影方程：

$$\begin{cases} BC\cdot\sin\theta_1^4=AC\cdot\sin\theta_{AC}^4-AB\cdot\sin\theta_8^4\triangleq A_4 \\ BC\cdot\cos\theta_1^4=AC\cdot\cos\theta_{AC}^4-AB\cdot\cos\theta_8^4\triangleq B_4 \end{cases}$$

求得，有

$$\theta_1^4=\mathrm{arctg}(A_4/B_4) \tag{6}$$

由式(1)～(6)可计算出各构件相对于构件4的角位置，而待求的足端轨迹是相对于真实机架8的，故还应将这些转角从固连于构件4的坐标架变换到机架坐标架中。固定机架时，有$\theta_8=0$，因为

$$\theta_8^4=\theta_8-\theta_4=-\theta_4$$

代入式(5)可解得：

$$\theta_4=-(\theta_{AC}^4+\varphi_4) \tag{7}$$

同理，可求得各构件相对于机架的角位置为：

$$\begin{cases} \theta_1=\theta_1^4+\theta_4;\quad \theta_2=\theta_2^4+\theta_4;\quad \theta_3=\theta_3^4+\theta_4; \\ \theta_5=\theta_5^4+\theta_4;\quad \theta_6=\theta_6^4+\theta_4;\quad \theta_7=\theta_7^4+\theta_4 \end{cases} \tag{8}$$

当曲柄位于机架上方时，则有

$$\theta_4=-(\theta_{AC}^4-\varphi_4)$$

其余各杆的转角计算公式同式(8)。

足端K相对于机架的轨迹点的坐标为：

$$\begin{cases} K_x=-AI\cdot\cos(\theta_6+\alpha_8)-(IJ+JK)\cdot\cos\theta_2 \\ K_y=-AI\cdot\sin(\theta_6+\alpha_8)-(IJ+JK)\cdot\sin\theta_2 \end{cases} \tag{9}$$

将(9)式对时间求一阶导数可得足端的速度；求二阶导数可得足端的加速度。而求导后新出现的变量$\dot\theta_2$, $\ddot\theta_2$, $\dot\theta_6$, $\ddot\theta_6$可用矩阵法求得，限于篇幅此处从略。

图3为基于逆推法由计算机仿真得到的足端相对轨迹。

4 结论

（1）本文提出的逆推法从分析相对运动关系入手，突破了传统分析方法的思维模式，解决了用传统方法不能解决的如图1所示一类平面复杂机构的简图求作问题；

（2）用逆推法进行位置分析时，总是能获得原动构件与从动构件运动参数之间的解析表达式；

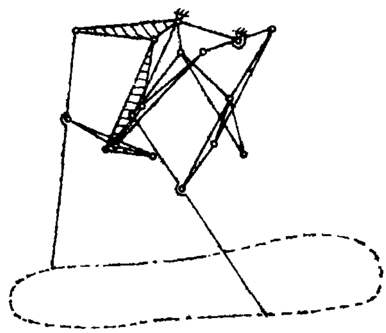

图 3 某型机器人步行腿机构的相对步态

（3）逆推法具有普遍的应用价值，尤其适于至少含有一个四杆环，且含机架在内的环为五杆环的平面机构。

参 考 文 献

[1] Hamilton H. Mabie, Fred W. Ocvirk. Mechanism and Dynamics of Machinery. Blacksburg. Virginia, 1978

[2] 孙桓. 机械原理. 北京：人民教育出版社，1983

[3] 舟桥宏明等.二足步行机械の脚机构の综合.日本机械学会论文集(C编)，50卷455号(昭59.7)

A New Method for Analyzing Kinematics of the Planar Complicated Mechanism

Pan Cunyun Yang Angyue

(Department of Precision Mechinery and Instrumentation)

Abstract

Based on the invariability principle of relative motion between two objects, a new method of analyzing kinematics of the planar complicated machanism has been presented in this paper. This new method can be used in drawing machanism chart and deriving the analytic expression among kinematic parameters. The method has been proved to be correct and effective by computer simulation.

Key words analyzing, kinematics, planar mechanism