国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第13卷第2期　1991年6月　Vol. 13 No. 2

利用验前信息的一种序贯检验方法——序贯验后加权检验方法

张　金　槐
（自动控制系）

摘　要　序贯验后加权检验方法是Bayes统计观点在假设检验中的运用。本文提出了该方法的一般理论，给出了当总体的分布参数具有验前信息时的序贯检验方法。文中确定了决策区的划分，同时讨论了序贯截尾方案，给出了检验中可能犯两类错误的概率的上界，并将一般理论应用于产品的可靠性检验和再入飞行器随机落点的精度鉴定。由于运用了验前信息，因此能有效地在少量试验之下进行统计假设检验。本文所提供的方法对于昂贵产品试验结果的统计评定具有普遍意义。

关键词　序贯假设检验，检验的效函数，可靠性，随机落点密集度
分类号　O212.3，V41

为了节省试验的次数，在小样本甚至是特小样本下，对总体的分布参数进行评估，这是人们早就关注的问题。过去，在工程技术界运用了经典的序贯概率比检验（Sequential Probability Ratio Test，简记为SPRT）方法。此后，由于组织实施上的原因，运用了截尾序贯检验方法。人们仅仅研究了简单假设的情况。即使这样，还是运用了Monte-Carlo方法对检验的效函数进行模拟计算，工作量仍较大。其次，验前信息毫无考虑，以致历次试验的信息没有得到充分利用，致使试验次数仍比较多。因此，我们期望，考虑未知分布参数的验前知识，并对SPRT方法进行改进，使得能在较少量的试验之下进行统计推断和分析。

考虑统计假设

$$\mathscr{H}_0:\theta\in\Theta_0,\mathscr{H}_1:\theta\in\Theta_1$$

其中$\theta_0<\theta_1$，当$\theta_0\in\Theta_0$，$\theta_1\in\Theta_1$；且$\Theta_0\cup\Theta_1=\Theta$，$\Theta_0\cap\Theta_1=\varnothing$. 此处$\Theta$为参数空间。因此$\Theta_0$，$\Theta_1$是$\Theta$的一个分划。

对于独立、同分布的子样$(x_1,\cdots,x_n)$，作似然函数在Θ_1，Θ_0上的验后加权比

$$O_n=\int_{\Theta_1}[\Pi_{i=1}^n f(x_i|\theta)]dF^\pi(\theta)\Big/\int_{\Theta_0}[\Pi_{i=1}^n f(x_i|\theta)]dF^\pi(\theta)\qquad(1)$$

其中$F^\pi(\theta)$为θ的验前分布函数，$\pi(\theta)$为其密度函数。引入常数A、B，$0<A<1<B$，运用下

1990年9月10日收稿

列检验法则：当 $O_n \leqslant A$，终止试验，采纳假设 $\mathscr{H}_0$；当 $O_n \geqslant B$，终止试验，采纳假设 $\mathscr{H}_1$；当 $A < O_n < B$，继续下一次试验，此时不作决策。这种方法称为序贯验后加权检验方法，简称 SPOT 方法。可以看到，$\log O_n$ 不再是独立、同分布的随机变量之和，因此序贯概率比检验(SPRT)的研究方法不能完全搬用到 SPOT 来。关于 A、B 的确定，平均试验数(ASN)，检验的效函数，犯两类错误的概率计算，截尾序贯方法等等都必须重新建立。

在下面的论述中，我们将应用 Bayes 判决的观点。在非 Bayes 的检验问题中，可将总体的参数 θ 作为未知的确定性的参数来看待。但在我们的讨论中，θ 看作是随机的，它具有分布函数 $F^{\pi}(\theta)$，密度函数为 $\pi(\theta)$. 在非 Bayes 检验中的总体密度函数 $f(x;\theta)$ 将记作 $f(x/\theta)$.

下面，首先给出 SPOT 方法和截尾 SPOT 方法的一般理论。然后，作为应用，讨论在特小子样下再入飞行器随机落点的射击密集度鉴定和可靠性检验问题。

1 决策区的划分——A、B 的一般近似表达

注意到样本空间 R_n 中，$\mathscr{H}_0$ 被采纳的点 $(x_1,\cdots,x_n)$ 满足 $O_n \leqslant A$，即

$$\int_{\theta\in\Theta_1} L(X/\theta)dF^{\pi}(\theta) \leqslant A\int_{\theta\in\Theta_0} L(X/\theta)dF^{\pi}(\theta) \tag{2}$$

其中 $L(X/\theta)$ 为似然函数，$X=(x_1,\cdots,x_n)$. 记

$$\mathscr{D}_n = \{X: O_n \leqslant A\}$$

将式 (2) 在 $\mathscr{D}_n$ 上积分，则我们有：

$$\int_{\mathscr{D}_n}\left(\int_{\theta\in\Theta_1} L(X/\theta)dF^{\pi}(\theta)\right)dX \leqslant A\int_{\mathscr{D}_n}\left(\int_{\theta\in\Theta_0} L(X/\theta)dF^{\pi}(\theta)\right)dX$$

由 Fubini 定理，交换积分次序，则

$$\int_{\theta\in\Theta_1}\left(\int_{\mathscr{D}_n} L(X/\theta)dX\right)dF^{\pi}(\theta) \leqslant A\int_{\theta\in\Theta_0}\left(\int_{\mathscr{D}_n} L(X/\theta)dX\right)dF^{\pi}(\theta) \tag{3}$$

上式左端括弧中的项 $\int_{\mathscr{D}_n} L(X/\theta)dX, \theta\in\Theta_1$，表示了当 $\theta\in\Theta_1$ 为真时，采纳 $\mathscr{H}_0$ 的概率，即它为采伪的概率 $\beta(\theta)$，而 θ 的验前分布为 $F^{\pi}(\theta)$，故(3)式左端表示考虑了 θ 的验前分布时的采伪概率（关于 $\beta(\theta)$ 的条件均值）记为 β_{π_1}，即

$$\beta_{\pi_1} = \int_{\theta\in\Theta_1} \beta(\theta)dF^{\pi}(\theta) \tag{4}$$

再考虑式(3)右端括弧中的项 $\int_{\mathscr{D}_n} L(X/\theta)dX$，其中 $\theta\in\Theta_0$，它表示当 $\theta\in\Theta_0$ 为真时采纳 $\mathscr{H}_0$ 的概率，于是 $\int_{\theta\in\Theta_0}\left(\int_{\mathscr{D}_n} L(X/\theta)dX\right)dF^{\pi}(\theta)$ 表示考虑验前信息时，当 Θ_0 为真而采纳 $\mathscr{H}_0$ 的概率，注意到

$$\int_{\theta\in\Theta_0} dF^{\pi}(\theta) - \int_{\theta\in\Theta_0}\left(\int_{\mathscr{D}_n} L(X/\theta)dX\right)dF^{\pi}(\theta)$$

$$= \int_{\theta\in\Theta_0}\int_{R_n-\mathscr{D}_n} L(X/\theta)dXdF^{\pi}(\theta) > \int_{\theta\in\Theta_0}\left(\int_{O_n>B} L(X/\theta)dX\right)dF^{\pi}(\theta)$$

$$=\int_{\theta\in\Theta_0}[\text{当}\ \theta\in\Theta_0\ \text{为真时，子样}\ X\ \text{落入}\ \{X:O_n\geqslant B\}\ \text{的概率，即拒绝}\ \mathscr{H}_0\ \text{的概率}]dF^{\pi}(\theta)$$

$$\equiv \text{考虑了验前信息时的弃真的概率} \triangleq \alpha_{\pi_0}$$

或者

$$\int_{\theta\in\Theta_0}\left(\int_{\mathscr{D}_n}L(X/\theta)dX\right)dF^{\pi}(\theta)<\int_{\theta\in\Theta_0}dF^{\pi}(\theta)-\alpha_{\pi_0}$$

因此

$$\beta_{\pi_1}\leqslant A\left(\int_{\theta\in\Theta_0}dF^{\pi}(\theta)-\alpha_{\pi_0}\right)$$

即

$$A\geqslant\frac{\beta_{\pi_1}}{\int_{\theta\in\Theta_0}dF^{\pi}(\theta)-\alpha_{\pi_0}} \tag{5}$$

这里假定$\int_{\theta\in\Theta_0}dF^{\pi}(\theta)-\alpha_{\pi_0}>0$，即 $\alpha_{\pi_0}<\int_{\theta\in\Theta_0}dF^{\pi}(\theta)\triangleq P_{\mathscr{H}_0}$，同理可得：

$$B\leqslant\frac{\int_{\theta\in\Theta_1}dF^{\pi}(\theta)-\beta_{\pi_1}}{\alpha_{\pi_0}}\triangleq\frac{(P_{\mathscr{H}_1}-\beta_{\pi_1})}{\alpha_{\pi_0}} \tag{6}$$

其中

$$P_{\mathscr{H}_1}=\int_{\theta\in\Theta_1}dF^{\pi}(\theta)$$

根据 A. Wald 同样的考虑，我们取：

$$A=\beta_{\pi_1}/(P_{\mathscr{H}_0}-\alpha_{\pi_0}),B=(P_{\mathscr{H}_1}-\beta_{\pi_1})/\alpha_{\pi_0} \tag{7}$$

其中

$$P_{\mathscr{H}_0}=\int_{\theta\in\Theta_0}dF^{\pi}(\theta),P_{\mathscr{H}_1}=1-P_{\mathscr{H}_0} \tag{8}$$

2 截尾 SPOT 方案及犯两类错误概率的上界

为便于 SPOT 方案的实施，人们总是设法采用序贯截尾方法。对于 SPOT 方法，如果在 $N-1$ 次试验之后仍未作出决策，那末在作了第 N 次试验之后，将继续试验区$\{X:A<O_N<B\}$分割为二个区域：

$$\mathscr{D}_1=\{X:A<O_N<C\},\mathscr{D}_2=\{X:B>O_N>C\}$$

当子样 X 落入 $\mathscr{D}_1$ 时，采纳 $\mathscr{H}_0$；而当 X 落入 $\mathscr{D}_2$ 时，采纳 $\mathscr{H}_1$. 这样，在第 N 次试验之后必定终止试验，且作出决策。记此序贯截尾方案为 T_N.

截尾方案可以多种多样。方案的好坏在于它的 OC 函数。我们总是在确定了一种截尾方案之后去计算出 OC 函数。对于 SPOT 方法来说，要一般地给出 OC 函数是困难的。因为 O_n 的分布难于一般地确定。因此，人们总是用 Monte-Carlo 方法计算 OC 函数。

这里，我们给出 T_N 方案犯两类错误概率（记作 α_N,β_N）的上界。如果确定出的这种上界在容许范围之内，那末这种截尾方案 T_N 是可以被采用的。

为此，记 $G^0_{(N)}$ 为 R_N 中的事件，它表示在 T_N 检验方案中采纳 $\mathscr{H}_0$ 的事件，$G^1_{(N)}$ 为在 T_N 方案中采纳 $\mathscr{H}_1$ 的事件，则

$$G^0_{(N)} \cap G^1_{(N)} = \varnothing, \quad G^0_{(N)} \cup G^1_{(N)} = R_N$$

为讨论方便起见，可考虑 $G^0_{(N)}$ 及 $G^1_{(N)}$ 为 R_∞ 中的柱集，这样，我们总可以将事件考虑为 R_∞ 中的集。

我们有

$$P(G^1_{(N)} | \mathscr{H}_0) = \alpha_N$$

若记 G^0, G^1 为 R_∞ 中的事件，它们分别表示在非截尾的 SPOT 方案中采纳 $\mathscr{H}_0$ 和 $\mathscr{H}_1$ 的事件，则

$$P(G^1_{(N)} | \mathscr{H}_0) = \alpha$$

此处 α 为非截尾 SPOT 方案犯第一类错误的概率。

令 G^{1*} 为 R_∞ 中的事件，它在截尾情况下采纳 $\mathscr{H}_1$ 而在非截尾情况下不采纳 $\mathscr{H}_1$（采纳 $\mathscr{H}_0$）。于是

$$G^1_{(N)} \subset (G^1 \cup G^{1*})$$

此外，令 I 为 I_∞ 中使 $C<O_N<B$ 成立的事件，于是

$$G^{1*} \subset I$$

因此

$$G^1_{(N)} \subset (G^1 \cup I)$$

而

$$\begin{aligned} \alpha_N &= P(G^1_{(N)} | \mathscr{H}_0) < P(G^1 \cup I | \mathscr{H}_0) \\ &= P(G^1 | \mathscr{H}_0) + P(I | \mathscr{H}_0) = \alpha + P(C<O_N<B | \mathscr{H}_0) \end{aligned} \tag{9}$$

考虑到 θ 的验前分布为 $F^*(\theta)$，则此时的犯第一类错误的概率（α_N 的关于 θ 的条件均值）为 $\int_{\theta\in\Theta_0} \alpha_N dF^*(\theta)$，记它为 α_{N*_0}，即

$$\alpha_{N*_0} = \int_{\theta\in\Theta_0} \alpha_N dF^*(\theta)$$

将式(9)两边关于 $dF^*(\theta)$ 在 $\{\theta:\ \theta\in\Theta_0\}$ 上积分，于是有

$$\alpha_{N*_0} < \int_{\theta\in\Theta_0} \alpha dF^*(\theta) + \int_{\theta\in\Theta_0} P(C<O_N<B | \mathscr{H}_0) dF^*(\theta) \triangleq \alpha_{*_0} + \overline{\Delta\alpha_{N*_0}} \tag{10}$$

其中

$$\alpha_{*_0} = \int_{\theta\in\Theta_0} \alpha dF^*(\theta)$$

$$\overline{\Delta\alpha_{N*_0}} = \int_{\theta\in\Theta_0} P(C<O_N<B | \theta, \theta\in\Theta_0) dF^*(\theta)$$

$\overline{\Delta\alpha_{N*_0}}$ 为截尾 SPOT 方案对于非截尾 SPOT 方案的犯第一类错误概率（条件均值）的增量上界。

同样地，有

$$\beta_{N*_1} < \beta_{*_1} + \overline{\Delta\beta_{N*_1}} \tag{11}$$

其中

$$\beta_{N*_1} = \int_{\theta\in\Theta_1} \beta_N dF^*(\theta), \quad \beta_{*_1} = \int_{\theta\in\Theta_1} \beta dF^*(\theta)$$

$$\overline{\Delta\beta_{N\pi_1}} = \int_{\theta\in\Theta_1} P(A < O_N \leqslant C \mid \theta, \theta \in \Theta_1) dF^{\pi}(\theta)$$

$\overline{\Delta\alpha_{N\pi_0}}$及$\overline{\Delta\beta_{N\pi_1}}$的计算依赖于总体的分布及验前分布 $F^{\pi}(\theta)$.

(10)式和(11)式就是我们所需的犯两类错误概率上界的公式。

3 应 用

SPOT 方法是人们感兴趣的一种假设检验方法，但是一般地，O_n 的分布很难确定出来的。即使能给出它的分布，也还会遇到计算上的困难。因此 SPOT 方法的实现比 A. Wald 的 SPRT 方法要复杂得多。下面将列举两方面重要的例子作一些必要的讨论和分析。

3.1 SPOT 方法在可靠性评定中的应用

可靠性问题，不论是元件的可靠性，还是系统的可靠性，不论是成败型模型(Bernoulli 模型)，还是寿命模型，运用验前信息进行评估的方法越来越受到工程技术人员的重视。可靠性是保证产品质量的重要方面。但在不少场合，由于设备（不论是元器件还是整机）价格昂贵，投试的样机较少，试验中所花时间较长，研制周期也较长，而可靠性要求又高。因此，必须充分运用已有的历史信息，使能在较小的样本之下，作出可靠性的合理评估。SPOT 方法恰好迎合了这种需要。

可靠性评定中，成败型模型并不困难。这里研究寿命型可靠性评定方法。

假定某产品的寿命为 X，其概率密度函数为

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \lambda > 0, t \geqslant 0$$

易知 $E[X]=\frac{1}{\lambda}$，$\mathrm{Var}[X]=\frac{1}{\lambda^2}$. $\frac{1}{\lambda}$为平均寿命，λ 称为失效率。现在要对 λ 进行评定。

今讨论下列复杂假设（简单假设的情况，SPOT 方法类似于 SPRT 方法）

$$\mathscr{H}_0: 0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{T^*} \triangleq \lambda^*$$

$$\mathscr{H}_1: \lambda > \lambda^*$$

且假定 λ 的验前密度为 Gamma 分布密度函数，即

$$\pi(\lambda) = g(\lambda; \alpha_0, \beta_0) = \frac{\alpha_0^{\beta_0}}{\Gamma(\beta_0)} \lambda^{\beta_0 - 1} e^{-\alpha_0 \lambda},\ \lambda > 0$$

其中 $\alpha_0>0$，$\beta_0>0$ 为分布参数，它由验前信息确定[1]。如果已经获得样本 $X=(x_1,\cdots,x_n)$，则 X 的密度函数为

$$p(X;\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda e^{-\lambda x_i}) = \lambda^n e^{-\lambda Y_n}$$

其中

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{为 } n \text{ 次试验中总的寿命(时间)}$$

于是

$$O_n = \frac{\int_{\lambda^*}^{+\infty} \lambda^n e^{-\lambda Y_n} \cdot \lambda^{\beta_0 - 1} e^{-\alpha_0 \lambda} d\lambda}{\int_0^{\lambda^*} \lambda^n e^{-\lambda Y_n} \cdot \lambda^{\beta_0 - 1} e^{-\alpha_0 \lambda} d\lambda}$$

而

$$\int_0^{\lambda^*}\lambda^{n+\beta_0-1}e^{-\lambda(Y_n+\alpha_0)}d\lambda=\frac{\Gamma(n+\beta_0)}{(\alpha_0+Y_n)^{n+\beta_0}}\cdot G(\lambda^*;\alpha_0+Y_n,n+\beta_0)$$

其中 $G(\lambda^*;\alpha_0+Y_n,n+\beta_0)$为 Gamma 分布函数。因此

$$On=\frac{1-G(\lambda^*;\alpha_0+Y_n,n+\beta_0)}{G(\lambda^*;\alpha_0+Y_n,n+\beta_0)} \tag{12}$$

下面给出一些重要性质,这些性质是不难证明的。

(1) 记 $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$，其中 X_i 具有指数寿命分布，即密度函数为 $f(x_i)=\lambda e^{-\lambda x_i}$，$i=1$，…，$n$，且 X_i 间互相独立，则

$$Y\sim \text{Gamma 分布 } G(y;\lambda,n)$$

(2) O_n 为 Y_n 的递减函数。

我们所获得的 SPOT 方案如下：对于从指数分布的总体所得的 $i.i.d$ 样本$(x_1,\cdots,x_n)$，(具体实施时，n 从 1 开始）计算

$$O_n=\frac{1-G(\lambda^*;\alpha_0+Y_n,n+\beta_0)}{G(\lambda^*;\alpha_0+Y_n,n+\beta_0)}$$

给定 α_{π_0}，β_{π_1}，在验前密度 $\pi(\lambda)=g(\lambda;\alpha_0,\beta_0)$之下，可算得 $P_{\mathscr{H}_0}$，$P_{\mathscr{H}_1}$，于是有

$$A=\frac{\beta_{\pi_1}}{\pi_0-\alpha_{\pi_0}},\quad B=\frac{\pi_1-\beta_{\pi_1}}{\alpha_{\pi_0}}$$

其中 $\pi_0=P_{\mathscr{H}_0}$，$\pi_1=P_{\mathscr{H}_1}$，则

(1) 当 $O_n\leqslant A$，采纳假设 $\mathscr{H}_0$；

(2) 当 $O_n\geqslant B$，采纳假设 $\mathscr{H}_1$；

(3) 当 $A<O_n<B$，不作决定，继续下一次试验。

对于上述 SPOT 方案，我们容易证明下列性质：

(3) SPOT 方案是封闭的。即是说，试验不可能无限制地进行下去，在有限次试验之后，终究会终止试验，从而作出采纳 $\mathscr{H}_0$ 或采纳 $\mathscr{H}_1$ 的决定。

下面给出截尾 SPOT 方法的犯两类错误概率的上界。如果试验中的停时为 N，即是说，在 N 次试验之前用上述 SPOT 方案，而在时刻 N，在 A，B 之间嵌入 C，当 $O_N<C$ 时，采纳假设 $\mathscr{H}_0$；而当 $O_n>C$ 时，则采纳 $\mathscr{H}_1$. 这样，在时刻 N 或 N 以前必然停止试验而作出相应的决定。我们来给出 $\alpha_{N\pi_0}$和 $\beta_{N\pi_1}$的上界的计算公式。我们知道

$$\alpha_{N\pi_0}<\alpha_{\pi_0}+\int_0^{\lambda^*}P(C<O_N<B|\lambda;0\leqslant\lambda\leqslant\lambda^*)\pi(\lambda)d\lambda\triangleq\alpha_{\pi_0}+I_0 \tag{13}$$

$$\beta_{N\pi_1}<\beta_{\pi_1}+\int_{\lambda^*}^{\infty}P(A<O_N\leqslant C|\lambda,\lambda>\lambda^*)\pi(\lambda)d\lambda\triangleq\beta_{\pi_1}+I_1 \tag{14}$$

因此，只要计算 I_0 和 I_1. 对于积分 I_0，只需注意

$$P(C<O_N<B)=\int_{t_1}^{t_2}p_{Y_n}(t)dt$$

其中 $p_{Y_n}(t)$是具有分布参数 $\alpha=\lambda$，$\beta=N$ 的 Γ—分布密度函数。

其中 $$O_N=\frac{1-G(\lambda^*;\alpha_0+Y_N,N+\beta_0)}{G(\lambda^*;\alpha_0+Y_N,N+\beta_0)}\triangleq\frac{1-G(Y_N)}{G(Y_N)}$$

而

$$\begin{cases} C = \dfrac{1 - G(t_2)}{G(t_2)} \\ B = \dfrac{1 - G(t_1)}{G(t_1)} \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} t_2 = G^{-1}\left(\dfrac{1}{C+1}\right) \\ t_1 = G^{-1}\left(\dfrac{1}{B+1}\right) \end{cases}$$

$$G(Y_N) = \frac{(\alpha_0 + Y_N)^{N+\beta_0}}{\Gamma(N+\beta_0)} \int_0^{\lambda^*} \lambda^{(N+\beta_0)-1} e^{-\lambda(\alpha_0+Y_N)} d\lambda$$

于是

$$P(C < O_N < B) = \frac{\lambda^N}{\Gamma(N)} \int_{t_1}^{t_2} Z^{N-1} e^{-\lambda Z} dZ \tag{15}$$

上述积分可用不完全 Γ-函数来计算。不完全 Γ-函数定义为

$$I_x(\beta) = \frac{\Gamma_x(\beta)}{\Gamma(\beta)}$$

其中
$$\Gamma_x(\beta) = \int_0^x e^{-t} t^{\beta-1} dt$$

对于 $\Gamma_x(\beta)$，令 $t=\lambda Z$，则

$$\Gamma_x(\beta) = \lambda^\beta \int_0^{\frac{x}{\lambda}} Z^{\beta-1} e^{-\lambda Z} dZ$$

于是

$$\int_0^{\frac{x}{\lambda}} Z^{\beta-1} e^{-\lambda Z} dZ = \frac{\Gamma_x(\beta)}{\lambda^\beta}$$

对于(15)，

$$\frac{\lambda^N}{\Gamma(N)} \int_{t_1}^{t_2} Z^{N-1} e^{-\lambda Z} dZ = \frac{\lambda^N}{\Gamma(N)} \left(\int_0^{t_2} - \int_0^{t_1} \right) Z^{N-1} e^{-\lambda Z} dZ$$

$$= \frac{1}{\Gamma(N)} (\Gamma_{t_2\lambda}(N) - \Gamma_{t_1\lambda}(N)) = I_{t_2\lambda}(N) - I_{t_1\lambda}(N)$$

于是

$$I_0 = \frac{\alpha_0^{\beta_0}}{\Gamma(\beta_0)} \int_0^{\lambda^*} (I_{t_2\lambda}(N) - I_{t_1\lambda}(N)) \lambda^{\beta_0-1} e^{-\alpha_0\lambda} d\lambda \tag{16}$$

上述积分，可用递推公式计算。事实上，注意不完全 Γ-函数的递推公式：

$$I_x(\beta) = I_x(\beta-1) - \frac{1}{\Gamma(\beta)} x^{\beta-1} e^{-x} \tag{17}$$

且记

$$I_0 = J_2(N) - J_1(N) \tag{18}$$

其中

$$J_i(N) = \frac{\alpha_0^{\beta_0}}{\Gamma(\beta_0)} \int_0^{\lambda^*} I_{t_i\lambda}(N) \lambda^{\beta_0-1} e^{-\alpha_0\lambda} d\lambda \qquad i = 1,2$$

而

$$J_i(N) = \frac{\alpha_0^{\beta_0}}{\Gamma(\beta_0)} \int_0^{\lambda^*} \left(I_{t_i\lambda}(N-1) - \frac{1}{\Gamma(N)}(t_i\lambda)^{N-1}e^{-t_i\lambda} \right) \lambda^{\beta_0-1}e^{-\alpha_0\lambda}d\lambda$$

$$= J_i(N-1) - \frac{\alpha_0^{\beta_0}}{\Gamma(\beta_0)} \cdot \frac{t_i^{N-1}}{\Gamma(N)} \cdot \frac{\Gamma(N-1+\beta_0)}{(\alpha_0+t_i)^{N-1+\beta_0}} G(\lambda^*;\alpha_0+t_i,N-1+\beta_0) \tag{19}$$

这就是所需要的递推公式。

这样，由式(19)，我们便可由(18)获得 I_0. 由公式(13)，我们获得了 $\alpha_{N\pi_0}$的上界为 $\alpha_{\pi_0}+I_0$.

用完全类似的方法，可获得(14)式中的 I_1：

$$I_1 = K_2(N) - K_1(N)$$

此处 $K_i(N)(i=1,2)$的递推公式是

$$K_i(N) = K_i(N-1) - \frac{\alpha_0^{\beta_0}}{\Gamma(\beta_0)} \cdot \frac{r_i^{N-1}}{\Gamma(N)} \cdot \frac{\Gamma(N-1+\beta_0)}{(\alpha_0+r_i)^{N-1+\beta_0}} \cdot [1 - G(\lambda^*;\alpha_0+r_i,N-1+\beta_0)] \quad i=1,2 \tag{20}$$

其中

$$r_1 = G^{-1}\left(\frac{1}{C+1}\right), \quad r_2 = G^{-1}\left(\frac{1}{A+1}\right).$$

$$K_i(N) = \frac{\alpha_0^{\beta_0}}{\Gamma(\beta_0)} \int_{\lambda^*}^{+\infty} I_{r_i\lambda}(N)\lambda^{\beta_0-1}e^{-\alpha_0\lambda}d\lambda, i=1,2$$

递推公式(19)及(20)计算至 $N=2$ 时为止，此时递推公式中的 $J_i(1)$及 $K_i(1)$分别由下列公式计算：

$$J_i(1) = G(\lambda^*;\alpha_0,\beta_0) - \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_0+t_i}\right)^{\beta_0} G(\lambda^*;\alpha_0+t_i,\beta_0) \tag{21}$$

$$K_i(1) = 1 - G(\lambda^*;\alpha_0,\beta_0)\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_0-r_i}\right)^{\beta_0}[1-G(\lambda^*;\alpha_0+r_i,\beta_0)], i=1,2 \tag{22}$$

3.2 SPOT 方法在再入飞行器随机落点精度鉴定中的应用

再入飞行器的命中精度，习惯上以圆概率偏差 CEP 作为衡量的指标。此时，总认为随机落点的纵向和横向偏差是互相独立的正态变量，且具有相同的方差 σ^2. 我们要从 n 次试验的落点（样本）去评定 CEP（或 σ）是否符合预定的某个额定值 E^*. 因此，要求检验的统计假设是

$$\mathscr{H}_0: \text{CEP} \leqslant E^*, \quad \mathscr{H}_1: \text{CEP} > E^*$$

或者，等价地，

$$\mathscr{H}_0: D = \sigma^2 \leqslant \left(\frac{E^*}{1.1774}\right)^2 = 0.7214E^{*2}$$

$$\mathscr{H}_1: D > 0.7214E^{*2}$$

设落点偏差 $\Delta X \sim N(0,\sigma^2)$，$\Delta Z \sim N(0,\sigma^2)$，记

$$r = \sqrt{(\Delta X)^2 + (\Delta Z)^2}$$

r 具有 Releigh 分布，即 r 的概率密度函数为

$$p(r) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma^2} r e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}, & r \geqslant 0 \\ 0, & r < 0 \end{cases}$$

以 $r_i=\sqrt{(\Delta X_i)^2+(\Delta Z_i)^2}$ ($i=1,\cdots,n$)，作为检验中的样本，此时 O_n 为

$$O_n=O_n(r_1,\cdots,r_n)=\frac{\int_{D_0}^{+\infty}p(r_1,\cdots,r_n|D)dF^\pi(D)}{\int_0^{D_0}p(r_1,\cdots,r_n|D)dF^\pi(D)}$$

其中 $p(r_1,\cdots,r_n|D)$为似然函数，$D_0=0.7214E^{*2}$，$F^\pi(D)$为 D 的验前分布。在下面讨论中，假定 $dF^\pi(D)=g_1(D;\alpha_0,\beta_0)dD$，此处 $g_1(D;\alpha_0,\beta_0)$为以(α_0,β_0)为参数的逆 Γ-函数，即

$$g_1(D;\alpha_0,\beta_0)=\frac{\alpha_0^{\beta_0}}{\Gamma(\beta_0)}D^{-(\beta_0+1)}e^{-\frac{\alpha_0}{D}}$$

其中 α_0，β_0 由验前信息确定。例如，如果具有与试验状态相同的 n_0 个落点的历史数据 $X_i^{(0)}$，$i=1,\cdots,n_0$，则可取（参 [1]）

$$\begin{cases}\alpha_0=\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_0}(X_i^{(0)}-\overline{X}^{(0)})^2\\[2ex]\beta_0=\dfrac{n_0-1}{2},\quad \overline{X}^{(0)}=\dfrac{1}{n_0}\sum_{i=1}^{n_0}X_i^{(0)}\end{cases}\tag{23}$$

为了给出检验上述假设的 SPOT 方案，要去计算 O_n 以及 A，B. 注意到

$$p(r_1,\cdots,r_n|D)=\frac{r_1\cdots r_n}{D^n}e^{-\frac{1}{2D}\sum_{i=1}^{n}r_i^2}$$

那末，经过计算，可得

$$O_n=\frac{K_{2\beta_1}\left(\dfrac{2\alpha_1}{D_0}\right)}{1-K_{2\beta_1}\left(\dfrac{2\alpha_1}{D_0}\right)}\tag{24}$$

其中 $K_{2\beta_1}(x)$为具有 $2\beta_1$ 个自由度的 χ^2 分布函数，

$$\begin{cases}\alpha_1=\alpha_0+\dfrac{1}{2}S_n^2\\ \beta_1=\beta_0+n\end{cases}$$

$$S_n^2=\sum_{i=1}^{n}r_i^2,\quad r_i^2=\Delta X_i^2+\Delta Z_i^2,\ i=1,\cdots,n.$$

于是有如下 SPOT 方案：

取定犯两类错误的概率 α_{π_0}，β_{π_1}，$\alpha_{\pi_0}<P_{\mathscr{H}_0}$，$\beta_{\pi_1}<P_{\mathscr{H}_1}$，此处

$$P_{\mathscr{H}_0}=\int_0^{D_0}dF^\pi(D)=1-K_{2\beta_1}(2\alpha_0/D_0)$$

$$P_{\mathscr{H}_1}=1-P_{\mathscr{H}_0}$$

计算 A 及 B：

$$A=\frac{\beta_{\pi_1}}{P_{\mathscr{H}_0}-\alpha_{\pi_0}},\quad B=\frac{P_{\mathscr{H}_1}-\beta_{\pi_1}}{\alpha_{\pi_0}}$$

在每次试验之后，计算 O_n（n 从 1 开始），

(1) 当 $O_n\leqslant A$ 时，采纳假设 $\mathscr{H}_0$；

(2) 当 $O_n\geqslant B$ 时，采纳假设 $\mathscr{H}_1$；

(3) 当 $A<O_n<B$ 时，不作决定，继续下一次试验。

如果落点具有系统性偏差，例如 $\Delta X\sim N(C_X,\ \sigma^2)$，$\Delta Z\sim N(C_Z,\ \sigma^2)$，则记 $r'=\sqrt{(\Delta X-C_X)^2+(\Delta Z-C_Z)^2}$，此时 r' 仍具有 Releigh 分布。于是以 $r'_i=\sqrt{(\Delta X_i-C_X)^2+(\Delta Z-C_Z)^2}$，$i=1,\cdots,n$，作为样本。我们仍得到(24)的表示式，所不同的仅是 S_n^2 将表示为 $S_n^2=\sum\limits_{i=1}^{n}r_i'^2$. 当 C_X, C_Z 为未知时，则将 S_n^2 改写为 $S_n^2\triangleq\sum\limits_{i=1}^{n}[(\Delta X_i-\overline{\Delta X})^2+(\Delta Z_i-\overline{\Delta Z})^2]$，其中$(\Delta X_i,\ \Delta Z_i)$为第 i 次试验的落点偏差，而$\overline{\Delta X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta X_i$，$\overline{\Delta Z}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta Z_i$. 且知 $S_n^2|\sigma^2\sim\chi^2_{2n-2}$.

由上述序贯检验方案构成序贯截尾检验方案是不困难的，只需在 A, B 之间嵌入 C，$A<C<B$，如果当 $N-1$ 次试验之后仍不能作出决策，则在 N 次试验之后，当 $O_N\leqslant C$ 时，采纳 $\mathscr{H}_0$；当 $O_N>C$ 时，采纳 $\mathscr{H}_1$. 这样，在 N 次试验之后必定终止试验，且作出决策。

我们再来计算序贯截尾方案下的犯两类错误概率的上界，只要注意 O_n 为 S_n^2 的递增函数，而 $S_n^2/\sigma^2\sim\chi^2_{2n-2}$（当落点系统误差存在且为未知时），因此 O_n 的概率计算可借助于具有 $2n-2$ 个自由度的 χ^2 分布来进行。此时 $\alpha_{N\pi_0}$和 $\beta_{N\pi_1}$的上界，由公式(10)及(11)计算。因此，只要计算$\overline{\Delta\alpha_{N\pi_0}}$及$\overline{\Delta\beta_{N\pi_1}}$. 先计算$\overline{\Delta\alpha_{N\pi_0}}$. 为此，我们计算 $P(C<O_N<B|D,D\in\Theta_0)$.

$$P(C<O_N<B|D,D\in\Theta_0)=P(O<O_N<B|D,D\in\Theta_0)-P(0<O_N<C|D,D\in\Theta_0) \tag{25}$$

上式右端第一项为

$$\begin{aligned}
&P\left\{0<\frac{K_{2\beta_1}(2\alpha_1/D_0)}{1-K_{2\beta_1}(2\alpha_1/D_0)}<B|D,D\in\Theta_0\right\}\\
&=P\left\{\frac{K_{2\beta_1}\left(\frac{2\alpha_1}{D_0}\right)}{B}<1-K_{2\beta_1}\left(\frac{2\alpha_1}{D_0}\right)<+\infty|D,D\in\Theta_0\right\}\\
&=P\left(0<\frac{2\alpha_0+S_N^2}{D_0}<K_{2\beta_1}^{-1}\left(\frac{B}{1+B}\right)\middle|D,D\in\Theta_0\right)
\end{aligned}$$

由于 $S_N^2/D\sim\chi^2_{2N-2}$，于是上式可写为

$$\begin{aligned}
&P\left(0<\frac{2\alpha_0}{D_0}+\frac{D}{D_0}\cdot\frac{S_N^2}{D}<K_{2\beta_1}^{-1}\left(\frac{B}{1+B}\right)\middle|D,D\in\Theta_0\right)\\
&=P\left(0<\chi^2_{2N-2}<\frac{D_0}{D}\left[K_{2\beta_1}^{-1}\left(\frac{B}{1+B}\right)-2\frac{\alpha_0}{D_0}\right]\middle|D,D\in\Theta_0\right)\\
&=K_{2N-2}\left[\frac{D_0}{D}\left(K_{2\beta_1}^{-1}\left(\frac{B}{1+B}\right)-2\frac{\alpha_0}{D_0}\right)\right]
\end{aligned} \tag{26}$$

(25)式右端第二项，只需将上式中的 B 改为 C 就可以了。于是由(10)，即得

$$\begin{aligned}
&\alpha_{N\pi_0}<\alpha_{\pi_0}+\int_{D\in\Theta_0}P(C<O_N<B|D,D\in\Theta_0)dF^{\pi}(D)\\
&=\alpha_{\pi_0}+\frac{\alpha_0^{\beta_0}}{\Gamma(\beta_0)}\int_0^{D_0}\left[Q_{2N-2}\left(\frac{k_C}{D}\right)-Q_{2N-2}\left(\frac{k_B}{D}\right)\right]\cdot D^{-(\beta_0+1)}e^{-\frac{\alpha_0}{D}}dD
\end{aligned} \tag{27}$$

其中，$k_C=D_0\left[K_{2\beta_1}^{-1}\left(\frac{C}{1+C}\right)-2\frac{\alpha_0}{D_0}\right]$，$k_B=D_0\left[K_{2\beta_1}^{-1}\left(\frac{B}{1+B}\right)-2\frac{\alpha_0}{D_0}\right]$，

$Q_{2N-2}(x)=1-K_{2N-2}(x)$.

记式(27)右端的第二项为 $I_{2N-2}^{(C)}-I_{2N-2}^{(B)}$，此处

$$I_{2N-2}^{(C)} = \frac{\alpha_0^{\beta_0}}{\Gamma(\beta_0)} \int_0^{D_0} Q_{2N-2}\left(\frac{k_C}{D}\right) D^{-(\beta_0+1)} e^{-\frac{\alpha_0}{D}} dD \tag{28A}$$

关于上述积分是不难计算的，只要注意 $Q_\nu(Z)$的下列关系式：

$$Q_\nu(Z) = e^{-\frac{Z}{2}}\left[1 + \frac{Z}{2} + \frac{Z^2}{2\cdot 4} + \cdots + \frac{Z^{\frac{\nu-2}{2}}}{2\cdot 4\cdots(\nu-2)}\right]$$

其中 ν 为偶数。于是

$$Q_{2N-2}\left(\frac{k_C}{D}\right) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{k_C}{D}\right)} \sum_{i=0}^{N-2} \frac{1}{2^i\cdot i!}\left(\frac{k_C}{D}\right)^i$$

由式(28A)，可得

$$I_{2N-2}^{(C)} = \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_0 + \frac{k_C}{2}}\right)^{\beta_0} \sum_{i=0}^{N-2} \frac{k_C^i}{2^i\cdot i!} \frac{\Gamma(\beta_0+i)}{\Gamma(\beta_0)} G_1\left(D_0;\ \alpha_0 + \frac{k_C}{2},\ \beta_0 + i\right) \tag{28B}$$

其中 $G_1\left(D_0;\ \alpha_0+\frac{k_C}{2},\ \beta_0+i\right)$ 为具有分布参数 $\left(\alpha_0+\frac{k_C}{2},\ \beta_0+i\right)$ 的逆 Γ-函数，注意到 $G_1(D_0;\ \alpha,\ \beta)=Q_{2\beta}\left(\frac{2\alpha}{D_0}\right)$，于是式(28A)成为

$$I_{2N-2}^{(C)} = \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_0 + \frac{k_C}{2}}\right)^{\beta_0} \sum_{i=0}^{N-2} \frac{k_C^i}{2^i i!} \frac{\Gamma(\beta_0+i)}{\Gamma(\beta_0)} Q_{2(\beta_0+i)}\left(\frac{2\alpha_0 + k_C}{D_0}\right) \tag{29}$$

关于 $I_{2N-2}^{(B)}$的计算，只需将上式中的 C 改为 B 就可以了。这样由式(27)，即得

$$\alpha_{N\pi_0} < \alpha_{\pi_0} + I_{2N-2}^{(C)} - I_{2N-2}^{(B)} \tag{30}$$

我们指出，(29)式右端的计算是容易的。$Q_{2\beta}(x)$可直接查 χ^2 分布表获得。至于 N，由于再入飞行器的试验样本较小，因此停时 N 比较小。例如当 $N=5$ 时，(29)式右端由四项组成。

至于$\overline{\Delta\beta_{N\pi_1}}$的计算，完全与上述方法相似，此时

$$\begin{aligned} &P\left(A < O_N < C \mid D, D\in\Theta_1\right) \\ &= \frac{\alpha_0^{\beta_0}}{\Gamma(\beta_0)} \int_{D_0}^{+\infty} \left[Q_{2N-2}\left(\frac{k_A}{D}\right) - Q_{2N-2}\left(\frac{k_C}{D}\right)\right] D^{-(\beta_0+1)} e^{-\frac{\alpha_0}{D}} dD \\ &= J_{2N-2}^{(A)} - J_{2N-2}^{(C)} \end{aligned} \tag{31}$$

则可知

$$J_{2N-2}^{(A)} = \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_0 + \frac{k_A}{2}}\right)^{\beta_0} \sum_{i=0}^{N-2} \frac{k_A^i}{2^i i!} \frac{\Gamma(\beta_0+i)}{\Gamma(\beta_0)} K_{2(\beta_0+i)}\left(\frac{2\alpha_0 + k_C}{D_0}\right) \tag{32}$$

$J_{2N-2}^{(C)}$的表示式只需将上式中之 A 改为 C 即可。这样

$$\beta_{N\pi_1} < \beta_{\pi_1} + J_{2N-2}^{(A)} - J_{2N-2}^{(C)} \tag{33}$$

仿真示例，由于仿真计算的类似性，我们只以飞行器落点精度鉴定为例。假定有复杂假设 $\mathscr{H}_0$：$D\leqslant D_0$，$\mathscr{H}_1$：$D>D_0$. $\pi(D)$取为逆 Gamma 函数 $g_1(D;\alpha_0,\beta_0)$，则在 α_0，β_0，n_0 及 D_0 的值给定之下，可计算 $P_{\mathscr{H}_0}$，$P_{\mathscr{H}_1}$. 例如，在一组验前信息（在历次相同试验状态之下的一组数据，数据略）之下，已算得 $P_{\mathscr{H}_0}=0.637$，$P_{\mathscr{H}_1}=0.363$. 取 $\alpha_{\pi_0}=\beta_{\pi_1}=5\%$，于是 $A=0.0862$，$B=6.4$. 在 A，B 中嵌入 C，今取 $C=1$，则当停时 $N=3,4,5$ 时，对应的犯两类错误的概率上界按公式(30)及(33)可计算得下表：

		N		
		3	4	5
项	$\bar{\alpha}_{N\pi_0}$	7.9%	7.43%	7.34%
目	$\bar{\beta}_{N\pi_1}$	24.1%	18.66%	12.08%

表中,$\bar{\alpha}_{N\pi_0}$，$\bar{\beta}_{N\pi_1}$为犯两类错误概率的上界。由此看出，弃真的概率不超过8%，而采伪的概率小于25%. 当然，这是在特小样本下的结论。即使在这种试验数极少的场合下，犯两类错误的概率并不是十分严峻的。表中看到，当序贯试验的最大次数为5时，犯两类错误的概率不超过12.08%. 因此，可以认为，在运用验前信息的场合下，在小样本下进行落点精度评定是完全可以实现的。

最后，作下列几点说明。

(1) 在应用示例中，我们没有给出简单假设的例。事实上，在简单假设的场合，SPOT方法类同于A. Wald的SPRT方法。例如，对于简单假设$\mathscr{H}_0$: $\theta=\theta_0$，$\mathscr{H}_1$: $\theta=\theta_1$，且$P_{\mathscr{H}_0}=\pi_0$，$P_{\mathscr{H}_1}=\pi_1$，此时$O_n=\frac{\pi_1}{\pi_0}\cdot\frac{L(X/\theta_1)}{L(X/\theta_0)}$，此处$L(X/\theta)$为似然函数，$X=(x_1,\cdots,x_n)$为样本。于是

$$A=\frac{\beta_{\pi_1}}{P_{\mathscr{H}_0}-\alpha_{\pi_0}},\quad B=\frac{P_{\mathscr{H}_1}-\beta_{\pi_1}}{\alpha_{\pi_0}}$$

这样SPRT方法完全适用于SPOT方法,所不同的只是SPOT方法犯两类错误的概率更小而已。

(2) 关于SPOT方法的OC函数，用一个一般的解析式表示是困难的。为此，建议用Monte-Carlo方法计算。

(3) 序贯截尾方案中，在A，B之间嵌入C，C值的确定可如下进行：首先，对于犯两类错误概率的上界进行控制。例如，控制$\alpha_{N\pi_0}$，使它的上界不超过$\alpha^*_{N\pi_0}$，称它为容许上界。于是，令（以随机落点精度评定为例）

$$\alpha_{\pi_0}+I^{(C)}_{2N-2}-I^{(B)}_{2N-2}=\alpha^*_{N\pi_0}$$

或

$$I^{(C)}_{2N-2}=\alpha^*_{N\pi_0}-\alpha_{\pi_0}+I^{(B)}_{2N-2}\triangleq I^*$$

I^*是可以算得的已知量。再由式(28B),令它的右端为I^*,解出k_C,记它为k_C^*. 一般地,可以用图解法获得k_C^*. 由k_C与C的关系式即可获得k_C^*所对应的C值,记为C^*,它为

$$C^*=\frac{K_{2\beta_1}\left(\frac{k_C^*}{\sigma_0^2}+\frac{2\alpha_0}{\sigma_0^2}\right)}{1-K_{2\beta_1}\left(\frac{k_C^*}{\sigma_0^2}+2\frac{\alpha_0}{\sigma_0^2}\right)}$$

以C^*嵌入A,B. 此时的序贯截尾方案控制了$\alpha_{N\pi_0}$的上界。确定了C^*之后,$\beta_{N\pi_1}$的上界计算由(33)式进行。这里指出，通过C^*建立起来的$\alpha_{N\pi_0}$和$\beta_{N\pi_1}$的上界的关系，对于犯两类错误概率的分析是有意义的。

参考文献

[1] 张金槐，唐雪梅．Bayes方法．国防科技大学出版社，1989

[2] Berger J. Statistical Decision Theory. Sprin-Verlag, 1980

[3] Zacks S. Statistical Inferences. John-Wiley Son. 1976

A Sequential Testing Method with Prior Information —— Sequential Posterior Weighted Testing Method (SPOT Method)

Zhang Jinhuai

(Department of Automatic Control)

Abstract

The general theory of sequential weighted test, and the truncated SPOT is discussed in this paper. The upper bound of the two kinds of error for testing hypothesis of the truncated SPOT is derived. Two application examples of this method are provided; one is the reliability testing of product; the other is the accuracy detecting of the random fall point of the re—entry vehicle. By virtue of using prior information before testing, we can efficiently test statistical hypothesis under the condition of small testing number. This SPOT method is quite significant to statistical detection of expensive products.

Key words sequential testing hypothesis, power function of the test, reliability, dispersion of the random fall points