

# 微重状态下带隔板球形贮箱中 静液面形状优化算法

赵志建 王锦瑜

(自动控制系)

**摘要** 本文提出了一种用于计算微重力下带隔板球形贮箱内的静液面形状的综合寻优算法,在 Bond 数 0.01~300,接触角 0~90°,充液比 0.01~0.99 范围内所做的大量计算表明:该算法收敛性好,收敛速度快,精度高。

**关键词** 微重力,充液系统,液体晃动

**分类号** V511.1

微重力下卫星贮箱中静液面形状的确是卫星防晃动力学与控制及其工程设计的重要依据和基础。目前对于简单规则贮箱内静液面形状,已经研究了较好的算法<sup>[1-5]</sup>,但对于带有防晃隔板的实际贮箱结构,有关理论研究工作还不够完善。该问题可归结为求解一含参非线性常微分方程组的边值问题,其主要困难是算法难以获得较理想的收敛性和收敛速度。本文的工作解决了这一困难。

## 1 数学模型

如图1所示, MN 为贮箱隔板。取体坐标系  $or\theta z$ , 设微重力  $\vec{g}$  方向沿  $z$  轴负向, 在  $orz$  平面中静液面曲线为

$$z=f(r) \quad (1)$$

式中,函数  $f(r)$  必须满足如下关系

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{rf_r}{\sqrt{1+f_r^2}} \right) = N_b \cdot f + C$$

$$f_r(0) = 0 \quad (\text{对称性条件})$$

$$\theta_c = \text{const} \quad \text{在接触线 } \gamma_c \text{ 上} \quad (\text{接触线条件})$$

(2)

式中,  $N_b = \frac{\rho g a^2}{\sigma}$  为 Bond 数,  $f_r = \frac{df}{dr}$ ,  $\theta_c$  是接触角,  $C$  为一常数,  $\rho$ 、 $\sigma$  分别是液体密度和表面张力,  $a$  是球腔半径。

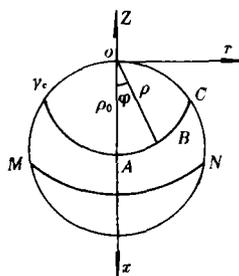


图1 坐标系示意

为了便于求解问题(2), 文献[1]中引入如下极坐标变换

$$z = -\rho(\varphi)\cos\varphi, \quad r = \rho(\varphi)\sin\varphi \quad (3)$$

把(2)式转换成

$$\begin{cases} \rho_{\varphi\varphi} = \frac{2\rho^2 + 3\rho_\varphi^2}{\rho^2} \cdot \frac{\rho_\varphi}{\rho^2} \operatorname{ctg}\varphi(\rho^2 + \rho_\varphi^2) + \frac{1}{\rho}(N_B\rho\cos\varphi - C)(\rho^2 + \rho_\varphi^2)^{3/2} \\ \varphi = 0, \quad \rho(0) = \rho_0, \quad \rho_\varphi(0) = 0 \\ \varphi = \varphi^{(e)}, \quad \theta_c = \operatorname{const} \end{cases} \quad (4)$$

式中,  $C = N_B\rho_0 + 2k_0$ ,  $\rho_0$ 是液面  $A$  点(见图1)的极径,  $k_0$ 是  $orz$  平面中  $A$  点处的曲率。

我们在研究中发现, 问题(4)在  $\rho_\varphi < 0$  后(对应于图1中  $BC$  段曲线)收敛性态变差。这是因为  $\rho_\varphi$  随  $\varphi$  的增加很快趋向于负无穷大, 导致数值积分在  $C$  点附近因  $|\rho_\varphi|$  太大而产生运算溢出。

现考虑在  $\theta = \operatorname{const}$  平面中建立直角坐标系  $oxr$ , 如图1所示。引入变换

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dr}{ds} = \sin\alpha \quad (5)$$

$s$  是以  $A$  为原点, 设曲线(1)度量的弧长坐标。问题(2)可转换成

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dr}{ds} = \sin\alpha \\ \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\cos\alpha}{r} + C - N_B \cdot x \\ s = 0, \quad x = x_0, \quad r = r_0, \quad \alpha = \alpha_0 \\ s = s^{(e)}, \quad \theta_c = \operatorname{const} \end{cases} \quad (6)$$

该问题在  $A$  点附近存在  $\frac{1}{r}$  奇性, 但在液面  $BC$  段性态很好。

鉴于边值问题(4)和(6)收敛性态的不同特点, 我们提出如下混合边值问题

$$\begin{cases} \text{问题(4)} & \text{当 } \rho_\varphi > 0 \text{ 时} \\ \text{问题(6)} & \text{当 } \rho_\varphi \leq 0 \text{ 时} \end{cases} \quad (7)$$

$\rho_\varphi = 0$  对应于图1中液面曲线上  $B$  点, 该点处坐标变换关系如下

$$x = \rho(\varphi)\cos\varphi, \quad r = \rho(\varphi)\sin\varphi, \quad \operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{ctg}\varphi \quad (8)$$

实践表明, 求解(7)式可从根本上解决算法的收敛性问题。

## 2 优化算法

问题(7)中含有参数  $N_B$ 、 $\rho_0$  (或  $x_0$ )、 $k_0$  以及  $\varphi^{(e)}$  (或  $S^{(e)}$ )。对于已知条件 ( $N_B$ 、 $\alpha_c$ 、 $\theta_c$ )、 $\varphi^{(e)}$  (或  $S^{(e)}$ ) 可在计算中通过液、物面关系判断加以确定, 但微分方程中含有未知参数  $\rho_0$ 、 $k_0$ , 这使得我们在求解时必须进行迭代计算。为了寻求具有较快收敛速度的算法, 我们把求解(7)归结为寻求目标函数  $F(\rho_0, k_0) = |\alpha_v^*(\rho_0, k_0) - \alpha_v|^2 + |\theta_c^*(\rho_0, k_0) - \theta_c|^2$  之极小点  $(\rho_0^*, k_0^*)$  的问题。其寻优计算的基本方法如下:

第一步: 在  $\rho_0 - k_0$  平面中寻优

设置目标函数

$$F_i = [\alpha_v^*(i) - \alpha_v]^2 + [\theta_c^*(i) - \theta_c]^2 \quad (9)$$

如图2所示,先在  $\rho_0 - k_0$  平面中取4点 (1、2、3、4) 并依次计算出  $\alpha_v^*(i)$ 、 $\theta_c^*(i)$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ), 然后取  $F_{\min} = \min_{1 \leq i \leq 4} F_i$ ,

得与  $F_{\min}$  相应的下标  $I$  (例如  $I=2$ ), 则下次搜寻的范围缩小至以  $I$  点为中心的区域 (如同图2所示阴影部分)。这种寻优过程一直进行到函数 (9) 式中两平方项之一较小 (但可能还不满足精度要求) 为止。这一步骤的目的在于较快确定离真值较近的  $(\rho_0, k_0)$  点之位置。

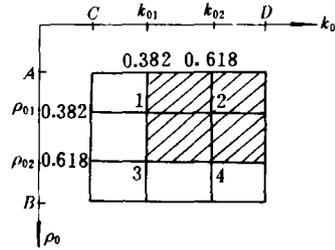


图2  $\rho_0 - k_0$  平面

### 第二步: 交替进行一维二次寻优

其基本思想是把上述问题转化成两个一维寻优的问题。这一策略的确定是依据如下物理事实: 当  $\rho_0$ 、 $k_0$  在一定范围内变化时, 影响体积比计算值  $\alpha_v^*$  的主要因素是  $\rho_0$ , 而  $k_0$  的变化主要影响  $\theta_c^*$ 。因而设置两个目标函数:

$$F_v(\rho_0) = |\alpha_v^*(\rho_0) - \alpha_v|; \quad F_\theta(k_0) = |\theta_c^*(k_0) - \theta_c| \quad (10)$$

如果经过第一步搜寻过程之后, 函数  $F_v(\rho_0)$ 、 $F_\theta(k_0)$  中某个值较小 (如  $F_\theta(k_0) < \delta$ ,  $\delta$  是一较小正数), 则保持相应参数 (如  $k_0$ ) 的当前值, 对另一目标 (如  $F_v(\rho_0)$ ) 进行一维寻优, 使之达到一定精度后再进行另一参变量的一维寻优, 如此交替, 直到对于预定精度  $\epsilon_1$ 、 $\epsilon_2$ , 有  $F_v < \epsilon_1$ , 且  $F_\theta < \epsilon_2$ 。下面以对  $\rho_0$  的一维搜索为例, 说明其算法思路。

设对于参数  $\rho_{01}$ 、 $\rho_{02}$ 、 $\rho_{03}$ , 已算得相应值  $\alpha_{v1}^*$ 、 $\alpha_{v2}^*$ 、 $\alpha_{v3}^*$  以及函数值  $F_{v1}$ 、 $F_{v2}$ 、 $F_{v3}$ , 且  $F_{v1} > F_{v2} > F_{v3}$ 。对于当前新一轮搜索, 置  $\rho_{01}^* = \rho_{02}$ ,  $\rho_{02}^* = \rho_{03}$ , 关键要确定新点  $\rho_{03}^*$ 。

### 2.1 局部极小点的确定

作目标函数的二次插值函数

$$F_v = a_0 + a_1 \rho_0 + a_2 \rho_0^2$$

于是有

$$F_{v,j} = a_0 + a_1 \rho_{0j} + a_2 \rho_{0j}^2 \quad (j=1, 2, 3) \quad (11)$$

$$\text{因多项式 } F_v(\rho_0) \text{ 的极小点为: } \rho_m = -\frac{1}{2} \frac{a_1}{a_2} \quad (12)$$

由方程 (11) 求出系数  $a_1$ 、 $a_2$ , 代入式 (12) 整理后得

$$\rho_m = \frac{1}{2} \left( \rho_{01} + \rho_{02} - \frac{c_1}{c_2} \right) \quad (13)$$

式中,

$$c_1 = \frac{F_{v3} - F_{v1}}{\rho_{03} - \rho_{01}}, \quad c_2 = \frac{1}{\rho_{02} - \rho_{03}} \left( \frac{F_{v2} - F_{v1}}{\rho_{02} - \rho_{01}} - c_1 \right)$$

### 2.2 搜索方向

确定搜索方向就是要使目标函数值  $F_v$  保持较快下降速率。如果由式 (13) 确定  $\rho_m$  之相应函数值  $F_v(\rho_m) < F_v(\rho_{02}^*)$ , 则  $\rho_m$  正好在搜索方向上, 可取  $\rho_{03}^* = \rho_m$ ; 否则, 由式 (13) 确定的  $\rho_m$  不在搜索方向上, 需要考虑如下情况, 以确定  $\rho_{03}^*$ :

(1) 当  $\rho_m = \rho_{01}^*$  或  $\rho_m = \rho_{02}^*$ , 则显然与之相应的  $F_v$  值不比  $F_{v1}^*$  或  $F_{v2}^*$  小, 这时作外推

$$\rho_{03}^* = \begin{cases} \rho_{01}^* = 0.38(\rho_{02}^* - \rho_{01}^*) & \text{当 } \rho_m = \rho_{01} \\ \rho_{02}^* - 0.38(\rho_{01}^* - \rho_{02}^*) & \text{当 } \rho_m = \rho_{02} \end{cases} \quad (14)$$

(2) 当  $(\alpha_{v2}^* - \alpha_v)(\alpha_{v1}^* - \alpha_v) < 0$ , 但  $(\rho_m - \rho_{01}^*)(\rho_m - \rho_{02}^*) < 0$ , 则新点  $\rho_{03}^*$  确定为

$$\rho_{03}^* = \frac{1}{2}(\rho_{01}^* + \rho_{02}^*) \quad (15)$$

(3) 当  $(\alpha_{v2}^* - \alpha_v)(\alpha_{v1}^* - \alpha_v) > 0$ , 则新点  $\rho_{03}^*$  用下式确定

$$\rho_{03}^* = \begin{cases} \rho_{02}^* + 1.3(\rho_{02}^* - \rho_{01}^*) & \text{当 } \alpha_{v2}^* > \alpha_v \\ \rho_{01}^* - 1.3(\rho_{02}^* - \rho_{01}^*) & \text{当 } \alpha_{v2}^* < \alpha_v \end{cases} \quad (16)$$

(4) 如果  $\rho_m$  超出了根据物理实际分析所确定的取值范围  $(A, B)$  (如  $0 \leq \rho_m \leq 2$ ), 则

$$\rho_{03}^* = \begin{cases} A + 0.5(Y_{\min} - A) & \text{当 } \rho_m < A \\ B - 0.5(B - Y_{\max}) & \text{当 } \rho_m > B \end{cases} \quad (17)$$

式中,  $Y_{\min} = \min(\rho_{01}^*, \rho_{02}^*)$ ,  $Y_{\max} = \max(\rho_{01}^*, \rho_{02}^*)$ .

上述限制和修正可以保证新点  $\rho_{03}^*$  在搜索方向上以较快速率逼近极小点  $\rho_0$ . 对  $k_0$  的一维寻优也遵循与上述类似的步骤。

在寻优计算中,  $\alpha_v^*$ 、 $\theta_c^*$  值是在液面积分曲线确定之后计算出来的。在对问题(7)中微分方程组的数值积分过程中, 为加快计算速度同时保持一定精度, 我们采用了自选步长 RK4 积分法<sup>[6]</sup>。

计算中发现, 对于某些已知条件 ( $N_B$ 、 $\alpha_v$ 、 $\theta_c$ ), 单一自由液面已无法满足  $F_v < \epsilon_1$  且  $F_\theta < \epsilon_2$  的要求, 因此在隔板上、下方同时存在自由液面的情况。我们在计算方案中考虑了这种多自由液面情况, 其基本方法是, 在隔板上下方同时确定自由液面, 使它们都满足接触角不变条件, 以及两自由液面下液体体积比之和与给定体积比  $\alpha_v$  之差小于  $\epsilon_1$ 。

### 3 计算结果分析

采用上述算法, 对带球面形防晃隔板的球形贮箱内微重静液面形状作了分析计算。所涉及的条件数为,  $N_B: 0.01 \sim 300$ ,  $\theta_c: 0^\circ \sim 90^\circ$ ,  $\alpha_v: 0.01 \sim 0.99$ 。对于每一组参数 ( $N_B$ 、 $\alpha_v$ 、 $\theta_c$ ), 在 IBM PC/XT286 微机上, 计算出相应的静液面所耗时为 3~5 分钟。

通过对大量计算结果的分析, 可以确定带隔板腔体内自由液面存在单一液面和多液面并存两种状况, 其形状的变化大致可归纳如下:

类型 1  $\alpha_v$  在 0.324~1.0 之间。在上舱内形成单一静液面, 有与隔板相交以及与箱壁相交两种情况, 见图 3。

类型 2  $\alpha_v$  约在 0.324~0.65 之间, 且  $N_B$  数较小。如图 4 所示, 上下两舱各有一液面存在, 为两液面并存状况。

类型 3  $\alpha_v$  在 0.297~0.324 之间或  $\alpha_v$  略小于 0.297, 且  $N_B$  数较大。如图 5 所示, 在下舱形成单一静液面。

类型 4  $\alpha_v$  小于 0.297, 且  $N_B$  数较小。如图 6 所示, 液体被吸附在下舱内隔板与箱壁交角处, 形成一回转型自由液面。

类型 5  $\alpha_v$  小于 0.297, 且  $N_B$  数较大。如图 7 所示, 为两液面并存状况。与类型 4 相比, 这种状况下表面张力较小, 可见下舱内液体除一部分吸附于交角处外, 另有一部分流到

箱底聚积而形成另一自由液面。

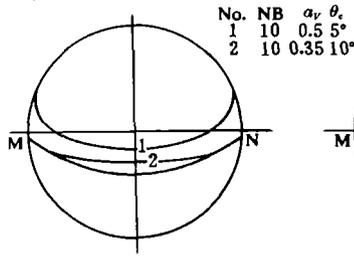


图3 类型1

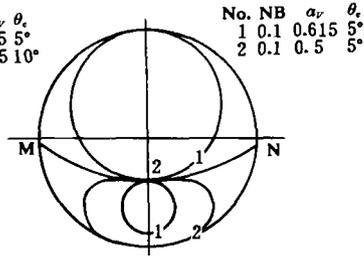


图4 类型2

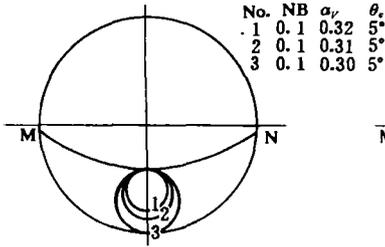


图5 类型3

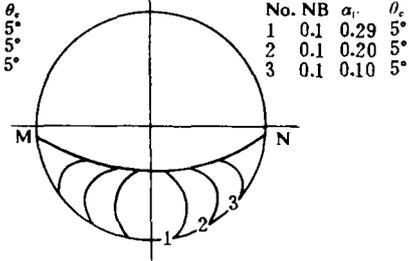


图6 类型4

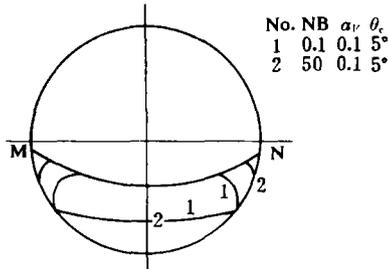


图7 类型5

## 4 结 论

微重力下带防晃隔板的球形贮箱内静液面计算，需要解决算法的收敛性和收敛速度问题。本文提出的不同坐标系下的混合边值问题(7)，以及为求解(7)所提出的优化计算方案，从根本上解决了上述困难。本文的优化算法收敛速度快，对于极端条件下(如 $\theta_c$ 为零或 $N_b$ 数很小)的静液面计算适应性强，可用于确定带隔板腔体内单一自由液面以及多自由液面的状况。

本文总结了在不同条件下的五类微重静液面形状，它们是通过本文的理论分析和计算得到的，在真实的微重环境中，这些液面形状是否都存在，以及是否还有更为复杂的液面形状，这些还需要通过实验观察加以确认。

本文的工作得到北京控制工程研究所的资助，在此表示感谢。

### 参 考 文 献

- [1] 王照林, 邓重平. 空间科学学报, 1985, 5(4): 294-302
- [2] 王耘, 王照林. 宇航学报, 1986, (4): 40-55
- [3] 王照林, 邓重平. 清华大学学报, 1986, 26(3): 1-9
- [4] Abramson N. H The Dynamic Behavior of Liquids in Moving Containers. NASA SP-106: 1966
- [5] Concus P, Crane G E. Satterlee H M. NASA-CR-72500, 1969
- [6] 徐萃薇. 计算方法引论. 北京, 高等教育出版社, 1985

## An Optimal Algorithm for Equilibrium Interfaces of Low-Gravity Liquids In the Spherical Tank with Space

Zhao Zhijian Wang Jingyu

(Department of Automatic Control)

### Abstract

This paper presents a synthetic optimal algorithm for determining the equilibrium interfaces under low gravity conditions in the spherical tank with spacers. By means of this algorithm, the interfaces have been investigated in the range of 0.01-300 of bond numbers, 0-90 degree of contact angles and 0.01-0.99 of liquid volume fractions. It is confirmed that the algorithm developed in this paper is convergent, efficient and correct.

**Key words** low-gravity, dynamic system, liquid sloshing