国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第13卷第3期 1991年9月 Vol. 13 No. 3

二部图的(g,f)匹配

谢 政
（系统工程与应用数学系）

摘 要 本文证明了二部图存在(g,f)匹配和f因子的充要条件以及有关的几个结果，并且给出了求二部图的最大(g,f)匹配、最小(g,f)匹配和最小权最大f匹配、最小权(g,f)匹配、最大权(g,f)匹配的算法。

关键词 运筹学，图论，网络流，算法，二部图，(g,f)匹配，f因子
分类号 O224

1 定 义

(1) 设$G=(V,E)$是无向图，f、g是V上的两个非负整值函数。如果E的一个子集M使得对一切$v\in V$，有$g(v)\leqslant d_M(v)\leqslant f(v)$，其中$d_M(v)$表示$M$中与$v$关联的边数，则称$M$为$G$的$(g,f)$匹配[1]。特别地，把$(0,f)$匹配简称为$f$匹配。

(2) 设M为G的(g,f)匹配，$v\in V$，若$d_M(v)=f(v)$，则称M上饱和顶点v；若$d_M(v)=g(v)$，则称M下饱和顶点v.

(3) 设M为G的f匹配，若$d_M(v)=f(v)$，则称M饱和顶点v. 若M饱和G的每一个顶点，则称M为G的f因子。

我们主要是讨论二部图的(g,f)匹配、f匹配和f因子。使用的概念和记号除特别声明外，均见[2].

2 最大和最小(g,f)匹配

设$G=(X,Y;E)$是二部图，$X=\{u_1,\cdots,u_m\}$，$Y=\{v_1,\cdots,v_n\}$. f、g是$X\cup Y$上的两个非负整值函数。易知，G中不一定存在(g,f)匹配。如果存在(g,f)匹配，自然就有最大（即边数最多的）(g,f)匹配和最小（即边数最少的）(g,f)匹配问题。为了求解G的最大和最小(g,f)匹配，我们构造一个网络$D=(V,U)$如下：增加两个新顶点s和t，对一切$u_i\in X$，$v_j\in Y$，分别连弧(s,u_i)和(v_j,t)，定义弧(s,u_i)的下、上容量分别为$g(u_i)$和$f(u_i)$，弧(v_j,t)的下、上容量分别为$g(v_j)$和$f(u_j)$；并且把G中的边u_iv_j改为弧(u_i,v_j)，定义弧(u_i,v_j)的下、上容量分别为0和1. 注意到，如果G中存在(g,f)匹配M，定义弧流量：

$$F(s,u_i)=d_M(u_i),\quad F(v_j,t)=d_M(v_j)$$

* 1990年3月22日收稿

$$F(u_i,v_j)=\begin{cases}1, & u_iv_j\in M;\\ 0, & u_iv_j\notin M,\end{cases}$$

则 F 是 D 的可行流；反之，若 D 有可行流，则必有最大流 $F^{(1)}$ 和最小流 $F^{(2)}$，根据最大流和最小流的整数性[2~3]，$F^{(k)}$ 的弧流量 $F^{(k)}(u_i,v_j)$ 等于 0 或者 1，$k=1$，2，令

$$M^{(k)}=\{u_iv_j\mid F^{(k)}(u_i,v_j)=1\},k=1,2$$

则 $M^{(1)}$ 和 $M^{(2)}$ 分别是 G 中的最大 (g,f) 匹配和最小 (g,f) 匹配。于是有以下两个结论：

(1) 二部图 G 存在 (g,f) 匹配当且仅当网络 D 有可行流；

(2) 求二部图 G 的最大 (g,f) 匹配和最小 (g,f) 匹配分别等价于求网络 D 中的最大流和最小流。

为了叙述方便，我们给出几个记号。对于网络 $D=(V,U)$，设 $S\subseteq V$，$\overline{S}=V\backslash S$，定义

$$(S,\overline{S})=\{(u,v)\in U\mid u\in S,v\in\overline{S}\}$$

若 $s\in S,t\in\overline{S}$，则称 $(S,\overline{S})$ 为 D 的截集。$(S,\overline{S})$ 的下容量是指 $(S,\overline{S})$ 中所有弧的下容量之和，记为 $a(S,\overline{S})$；$(S,\overline{S})$ 的上容量是指 $(S,\overline{S})$ 中所有弧的上容量之和，记为 $b(S,\overline{S})$. 对于二部图 $G=(X,Y;E)$，设 $A\subseteq X$，$B\subseteq Y$，用 $e(A,B)$ 表示 G 中同时关联 A 和 B 中顶点的边数。

定理 1 若二部图 $G=(X,Y;E)$ 存在 (g,f) 匹配，则 G 的最大 (g,f) 匹配的边数为

$$\xi=\sum_{u\in X}f(u)+\min_{\substack{A\subseteq X\\ B\subseteq Y}}\Big\{\sum_{v\in B}f(v)+e(A,Y\backslash B)-\sum_{u\in A}f(u)\Big\}$$

或者，
$$\xi=\sum_{v\in Y}f(v)+\min_{\substack{A\subseteq X\\ B\subseteq Y}}\Big\{\sum_{u\in A}f(u)+e(X\backslash A,B)-\sum_{v\in B}f(v)\Big\}$$

G 的最小 (g,f) 匹配的边数为

$$\eta=\sum_{u\in X}g(u)+\max_{\substack{A\subseteq X\\ B\subseteq Y}}\Big\{\sum_{v\in B}g(v)-\sum_{u\in A}g(u)-e(X\backslash A,B)\Big\}$$

或者，
$$\eta=\sum_{v\in Y}g(v)+\max_{\substack{A\subseteq X\\ B\subseteq Y}}\Big\{\sum_{u\in A}g(u)-\sum_{v\in B}g(v)-e(A,Y\backslash B)\Big\}$$

证明 对二部图 G 按上述方法构造网络 D，由前所述可知，G 中最大 (g,f) 匹配的边数 ξ 等于 D 中最大流的流量；G 中最小 (g,f) 匹配的边数 η 等于 D 中最小流的流量。

因为对 D 中任何截集 $(S,\overline{S})$ 都有 $S=A\cup B\cup\{s\}$，$A\subseteq X$，$B\subseteq Y$，所以

$$\begin{aligned}b(S,\overline{S})&=b(S,X\backslash A)+b(A,Y\backslash B)+(B,t)\\&=\sum_{u\in X\backslash A}f(u)+e(A,Y\backslash B)+\sum_{v\in B}f(v)\\ a(S,\overline{S})&=a(X\backslash A,B)=0\\ b(\overline{S},S)&=b(X\backslash A,B)=e(X\backslash A,B)\\ a(S,\overline{S})&=a(S,X\backslash A)+a(A,Y\backslash B)+a(B,t)\\&=\sum_{u\in X\backslash A}g(u)+\sum_{v\in B}g(v)\end{aligned}$$

根据最大流最小截集定理[2~3]，有

$$\xi=\min_{S}\{b(S,\overline{S})-a(\overline{S},S)\}$$
$$\eta=-\min_{S}\{b(\overline{S},S)-a(S,\overline{S})\}$$

化简上面两式得

$$\xi = \sum_{u\in X} f(u) + \min_{\substack{A\subseteq X\\ B\subseteq Y}} \left\{ \sum_{v\in B} f(v) + e(A, Y\backslash B) - \sum_{u\in A} f(u) \right\}$$

$$\eta = \sum_{u\in X} g(u) + \max_{\substack{A\subseteq X\\ B\subseteq Y}} \left\{ \sum_{v\in B} g(v) - \sum_{u\in A} g(u) - e(X\backslash A, B) \right\}$$

同样，对 D 中任何截集$(S,\overline{S})$均有 $S=(X\backslash A)\cup(Y\backslash B)\cup\{s\}$，$A\subseteq X$，$B\subseteq Y$，于是，按上述同样方法可得到定理 1 中的另外两个等式。（证毕）

定理 2　设二部图 $G=(X,Y;E)$存在(g,f)匹配。G 存在上饱和 X 的每个顶点的(g,f)匹配的充要条件是对任何 $A\subseteq X$，$B\subseteq Y$，有

$$\sum_{u\in A} f(u) \leqslant \sum_{v\in B} f(v) + e(A, Y\backslash B)$$

G 存在上饱和 Y 的每个顶点的(g,f)匹配的充要条件是对任何 $A\subseteq X$，$B\subseteq Y$，有

$$\sum_{v\in B} f(v) \leqslant \sum_{u\in A} f(u) + e(X\backslash A, B)$$

G 存在下饱和 X 的每个顶点的(g,f)匹配的充要条件是对任何 $A\subseteq X$，$B\subseteq Y$，有

$$\sum_{v\in B} g(v) \leqslant \sum_{u\in A} g(u) + e(X\backslash A, B)$$

G 存在下饱和 Y 的每个顶点的(g,f)匹配的充要条件是对任何 $A\subseteq X$，$B\subseteq Y$，有

$$\sum_{u\in A} g(u) \leqslant \sum_{v\in B} g(v) + e(A, Y\backslash B)$$

证明　设二部图 G 存在(g,f)匹配，则 G 存在上饱和 X 的每个顶点的(g,f)匹配，当且仅当 G 中最大(g,f)匹配的边数 $\xi = \sum_{u\in X} f(u)$．由定理 1，这等价于

$$\min_{\substack{A\subseteq X\\ B\subseteq Y}} \left\{ \sum_{v\in B} f(v) + e(A, Y\backslash B) - \sum_{u\in A} f(u) \right\} = 0$$

上式又等价于

$$\sum_{u\in A} f(u) \leqslant \sum_{v\in B} f(v) + e(A, Y\backslash B), \text{对一切 } A\subseteq X, B\subseteq Y$$

这就证明了定理 2 的第一部分。

定理 2 的其余部分同理可证。（证毕）

由定理 2 即得：

定理 3　设 $G=(X,Y;E)$是二部图，f 是 $X\cup Y$ 上的非负整值函数。G 存在饱和 X 的每个顶点的 f 匹配当且仅当

$$\sum_{u\in A} f(u) \leqslant \sum_{v\in B} f(v) + e(A, Y\backslash B), \text{对一切 } A\subseteq X, B\subseteq Y \tag{1}$$

G 存在饱和 Y 的每个顶点的 f 匹配当且仅当

$$\sum_{v\in B} f(v) \leqslant \sum_{u\in A} f(u) + e(X\backslash A, B), \text{对一切 } A\subseteq X, B\subseteq Y \tag{2}$$

定理 4　设 $G=(X,Y;E)$是二部图，f 是 $X\cup Y$ 上的非负整值函数。G 存在 f 因子当且仅当下面两式同时成立

$$\sum_{u\in X} f(u) = \sum_{v\in Y} f(v) \tag{3}$$

$$\sum_{u\in A} f(u) \leqslant \sum_{v\in B} f(v) + e(A, Y\backslash B), \text{对一切 } A\subseteq X, B\subseteq Y \tag{4}$$

证明　由定理 3 知，只要证明(1)、(2)两式同时成立当且仅当(3)、(4)两式同时成

立。又因为(1)式与(4)式相同，故只要证明(1)、(2)两式成立，则(3)式成立；(3)、(4)两式成立，则(2)式成立。

设(1)、(2)两式成立，特别地取 $A=X$，$B=Y$，则有

$$\sum_{u\in X}f(u)\leqslant\sum_{v\in Y}f(v),\ \sum_{v\in Y}f(v)\leqslant\sum_{u\in X}f(u)$$

即知(3)式成立。

设(3)、(4)两式成立，对任何 $A\subseteq X$，$B\subseteq Y$，记 $A_1=X\backslash A$，$B_1=Y\backslash B$，则由(4)式知：

$$\sum_{u\in A_1}f(u)\leqslant\sum_{v\in B_1}f(v)+e(A_1,Y\backslash B_1)$$

即
$$\sum_{u\in X}f(u)-\sum_{u\in A}f(u)\leqslant\sum_{v\in Y}f(v)-\sum_{v\in B}f(v)+e(X\backslash A,B)$$

由(3)式知，$\sum_{u\in X}f(u)=\sum_{v\in Y}f(v)$，故

$$\sum_{v\in B}f(v)\leqslant\sum_{u\in A}f(u)+e(X\backslash A,B)$$

即(2)式成立。　　　　(证毕)

下面我们来研究二部图存在(g,f)匹配的充要条件。

设 $G=(X,Y;E)$是二部图，f、g 是 $X\cup Y$ 上的两个非负整值函数，且对任何 $v\in X\cup Y$，有 $g(v)\leqslant f(v)$. 根据 G 按前面的方法构造网络 D，再在 D 中增加一条弧(t,s)，定义弧(t,s)的下容量为 0，上容量为$+\infty$，得到一个新网络 $\hat{D}$. 这样 D 中有可行流当且仅当 $\hat{D}$ 中有可行循环流。于是，G 存在(g,f)匹配当且仅当 $\hat{D}$ 有可行循环流。根据可行循环流存在性定理[2]知，$\hat{D}=(V,\hat{U})$存在可行循环流当且仅当对任何 $S\subseteq V$，有

$$b(S,\overline{S})\geqslant a(\overline{S},S)\tag{5}$$

定理 5　设 $G=(X,Y;E)$是二部图，g、f 是 $X\cup Y$ 上两个非负整值函数，且对一切 $v\in X\cup Y$，有 $g(v)\leqslant f(v)$. G 中存在(g,f)匹配当且仅当对 $A\subseteq X$，$B\subseteq Y$，下面两式同时成立：

$$\sum_{u\in A}g(u)\leqslant\sum_{v\in B}f(v)+e(A,Y\backslash B)\tag{6}$$

$$\sum_{v\in B}g(v)\leqslant\sum_{u\in A}f(u)+e(X\backslash A,B)\tag{7}$$

证明　由前面所述，只要证明(6)、(7)两式同时成立的充要条件是(5)式成立。

设(6)、(7)两式成立，对任何 $S\subseteq V=X\cup Y\cup\{s,t\}$，我们分四种情况讨论。

1)　$S=A\cup B\cup\{s\}$，$A\subseteq X$，$B\subseteq Y$.

$$b(S,\overline{S})=\sum_{u\in X\backslash A}f(u)+e(A,Y\backslash B)+\sum_{v\in B}f(v)$$
$$a(\overline{S},S)=0$$

显然，$b(S,\overline{S})\geqslant a(\overline{S},S)$.

2)　$S=A\cup B\cup\{t\}$，$A\subseteq X$，$B\subseteq Y$.

$$b(S,\overline{S})=+\infty,\ a(\overline{S},S)=\sum_{u\in A}g(u)$$

则 $b(S,\overline{S})\geqslant a(\overline{S},S)$.

3)　$S=A\cup B$，$A\subseteq X$，$B\subseteq Y$

$$b(S,\overline{S})=e(A,Y\backslash B)+\sum_{v\in B}f(v),\ a(\overline{S},S)=\sum_{u\in A}g(u)$$

由(6)式知，$b(S,\overline{S})\geqslant a(\overline{S},S)$.

4) $S=A\cup B\cup\{s,t\}$，$A\subseteq X$，$B\subseteq Y$

$$b(S,\overline{S})=e(A,Y\backslash B)+\sum_{u\in X\backslash A}f(u),\ a(\overline{S},S)=\sum_{v\in Y\backslash B}g(v)$$

令 $A_1=X\backslash A$，$B_1=Y\backslash B$，由(7)式知：

$$\sum_{v\in B_1}g(v)\leqslant e(X\backslash A_1,B_1)+\sum_{u\in A_1}f(u)$$

即

$$\sum_{v\in Y\backslash B}g(v)\leqslant e(A,Y\backslash B)+\sum_{u\in X\backslash A}f(u)$$

亦即 $b(S,\overline{S})\geqslant a(\overline{S},S)$.

由于 S 只能表示成上述四种情形之一，因此，若(6)、(7)两式成立，则(5)式成立。

反之，若(5)成立，对一切 $A\subseteq X$，$B\subseteq Y$，记 $S_1=A\cup B$，$S_2=(X\backslash A)\cup(Y\backslash B)\cup\{s,t\}$，则由(5)式有

$$b(S_1,\overline{S}_1)\geqslant a(\overline{S}_1,S_1) \tag{8}$$

$$b(S_2,\overline{S}_2)\geqslant a(\overline{S}_2,S_2) \tag{9}$$

通过计算 $b(S_1,\overline{S}_1)$，$a(\overline{S}_1,S_1)$和 $b(S_2,\overline{S}_2)$，$a(\overline{S}_2,S_2)$，不难知道，(8)式等价于(6)式，(9)式等价于(7)式，即(6)、(7)两式同时成立。　　(证毕)

现在我们讨论求二部图的最大 f 匹配以及最大(g,f)匹配和最小(g,f)匹配的算法。

对二部图 $G=(X,Y;E)$，按前面的方法构造网络 D，求 G 的最大 f 匹配相当于求 D 的最大流，而求网络的最大流有许多方法，见文献[2]。求 G 的最大(g,f)匹配和最小(g,f)匹配相当于求 D 的最大流和最小流，由文献[3]知，求 D 的最大流和最小流可利用修改的 Ford-Fulkerson 算法。

3　最小权和最大权(g,f)匹配

设 $G=(X,Y;E)$是二部图，f、g 是 $X\cup Y$ 上的两个非负整值函数。我们在 G 的每条边 u_iv_j 上赋一个非负权 w_{ij}，$u_i\in X$，$v_j\in Y$. 设 M 是 G 的一个(g,f)匹配，M 的权定义为 $\sum_{u_iv_j\in M}w_{ij}$. G 中权最小的(g,f)匹配和权最大的(g,f)匹配分别称为 G 的最小权(g,f)匹配和最大权(g,f)匹配。G 中权最小的最大 f 匹配称为 G 的最小权最大 f 匹配。

对于二部图 $G=(X,Y;E)$，按照前一节的方法构造网络 $\hat{D}$，定义弧(t,s)上流量的单位费用为 0. 对一切 $u_i\in X$，$v_j\in Y$，定义弧(s,u_i)和弧(v_j,t)上流量的单位费用为 0，弧(u_i,v_j)上流量的单位费用为 w_{ij}，得到一个带费用的网络 D_1. 这样，求 G 中最小权(g,f)匹配和最大权(g,f)匹配就转化成求 D_1 的最小费用循环流和最大费用循环流。可以使用“Out of kilter”方法和修改的“Out of kilter”方法求 D_1 的最小费用循环流和最大费用循环流，见文献[2～3].

同样，根据二部图 G 按前一节的方法构造网络 D，并且，对任何 $u_i\in X$，$v_j\in Y$，定义弧(s,u_i)和弧(v_j,t)上流量的单位费用为 0，弧(u_i,v_j)上流量的单位费用为 w_{ij}. 于是，求 G 的最小权最大 f 匹配等价于求 D 上的最小费用最大流，而求最小费用最大流的方法见[2].

4 应 用

二部图的(g,f)匹配有很多应用，下面我们略举两例。

例1 招生录取问题。设有m个考生报考n个专业，考生的集合记为X，招生专业的集合记为Y，$uv\in E$当且仅当考生u报考专业v，于是得到一个二部图$G_1=(X,Y;E)$. 用$f(v)$表示专业v的招生人数；令$f(u)\equiv 1$，对一切$u\in X$，则录取方案与二部G的f匹配一一对应。

若考生u的第l个志愿是报考专业v，并且考生u的成绩为c，则定义G_1中边uv的权为$l+\frac{1}{c}$，则G_1的最小权最大f匹配就是一个对考生"最优"的录取方案。

例2 毕业分配问题。有m个学校的毕业生要分配到n个单位，其中第i个学校有c_i名毕业生；第j个接收单位最多需要b_j毕业生，至少需要a_j名毕业生。记学校的集合$X=\{u_1,\cdots,u_m\}$，接收单位的集合$Y=\{v_1,\cdots,v_n\}$，并且，若学校u_i中有k名毕业生志愿去单位v_j，则E中有k条边联接u_i与v_j. 这样就得到了一个多重的二部图$G_2=(X,Y;E)$. 定义$X\cup Y$上的非负整值函数f、g：

$$f(v)=\begin{cases}c_i, v=u_i,\\ b_j, v=v_j;\end{cases}\qquad g(v)=\begin{cases}0, v=u_i,\\ a_j, v=v_j.\end{cases}$$

于是，毕业分配方案与G_2中的(g,f)匹配是一对一的。

我们在G_2的边上按如下方法赋权：若学校u_i的某个毕业生的第l志愿是去单位v_j，并且该毕业生的德、智、体综合评分为r，则G_2中u_i与v_j之间的某一条边上的权为$r+\frac{1}{l}$. 这样，G_2中的一个最大权(g,f)匹配就是一个"满意"的毕业分配方案。

参 考 文 献

[1] Akiyama J and Kano M. Factors and Factorizations of Graphs-A Survey. J. Graph Theory, 1985, 9(1): 1～42

[2] 田丰，马仲番. 图与网络流理论，北京：科学出版社，1987

[3] 陈庆华，谢政. 网络相容流的四个问题. 系统工程，1988，6(4)：13～16

(g,f)-Matchings of Bipartite Graphs

Xie Zheng

(Department of System Engineering and Applied Mathematics)

Abstract

In this paper, the sufficient and necessary condition of the existence theorems for (g,f)-matchings and f-factors of bipartite graphs and several related results are proved. We give the algorithms to solve the maximum (g,f)-matching, the minimum(g,f)-matching, the minimum weighted maximum f-matching, the minimum weighted (g,f)-matching and the maximum weighted (g,f)-matching of bipartite graphs.

Key words operations research, graph theory, network flows, algorithms, bipatite graphs, (g,f)-matchings, f-factors