国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第13卷第4期 1991年12月 Vol. 13 No. 4

De Vogelaere 映射线性 Jacobi 矩阵的图形表示

汪秉宏 刘伍明 兰马群
(中国科技大学) (蒙自师专) (国防科技大学)

摘 要 对于可逆的二维保面积 De Vogelaere 映射，本文给出了 n 次迭代的线性 Jacobi 矩阵元的图形表示及其数学证明。

关键词 De Vogelaere 映射，线性 Jacobi 矩阵
分类号 O411. 1

不可积 Hamilton 体系的运动轨道可以分为椭圆型周期轨道、双曲型周期轨道、KAM 环面和混沌轨道[1]。椭圆型周期轨道是稳定的，双曲型周期轨道是不稳定的。当周期轨道从椭圆型转变为双曲型时，可以分岔出倍周期或同周期轨道。不稳定的周期轨道周围总是存在着测度不为零的混沌区域。因此，分析周期轨道的稳定性变化情况并考察其分岔行为，可以使我们了解不可积 Hamilton 体系的许多动力学信息。

自由度为 2 的与时间无关的 Hamilton 体系或者自由度为 1 的具有周期性时间依赖关系的 Hamilton 体系的动力学性质可以通过该体系的运动轨道穿过相空间中的 Poincare 截面而形成的二维保面积映射来描述。可逆的二维保面积映射所描述的是具有一定对称性的 Hamilton 体系[2,3]. 可逆保面积映射的线性 Jacobi 矩阵提供了这类对称的不可积 Hamilton 体系的周期轨道的稳定性和分岔行为的信息。因此，求出可逆保面积映射的线性 Jacobi 矩阵的一般表达式并研究其一般的结构，是非线性动力学中一个令人感兴趣的问题。

De Vogelaere 映射（以下简称 DV 映射）的定义是[4]

$$\begin{cases} x_{n+1} = -y_n + f(x_n) \\ y_{n+1} = x_n - f(x_{n+1}) \end{cases} \tag{1}$$

它是可逆的二维保面积映射，x 轴是它的主对称线[5]。若对映象式(1)作保面积的坐标变换 $x \to x$，$y \to y + f(x)$，则 DV 映射可化为映射

$$x_{n+1} = -y_n + 2f(x_n),\quad y_{n+1} = x_n$$

因此，当 $f(x)$ 取二次函数 $(1-ax^2)/2$ 时，是保面积的 Hènon 映射[6]；当 $f(x)$ 取作 $cx+x^2$ 时，

* 1989年9月9日收稿

是 *Helleman* 映射；当 $f(x)$取作 $c(x+x^2)/2$ 时，是 Zisook 映射[8]。所有这些映射，都与 Green 所研究的 $f(x)$取作 $px+(1-p)x^2$ 的二次方 DV 映射等价[9]。若取 $f(x)=x+kG(x)/2$，对 DV 映射作保面积坐标变换，即 $x\to x$，$y\to -y-kG(x)/2$，则可化为广义标准映射

$$y_{n+1}=y_n+kG(x_n),\ x_{n+1}=x_n+y_{n+1}$$

当 $G(x)=-\sin(2\pi x)/2\pi$，就得到著名的 Chirikov－Taylor 标准映射[10]。由此可见，DV 映射作为可逆保面积映射的代表具有相当大的普遍性。由于 DV 映射的主对称线是直线 x 轴，这使对称性的分析变得非常简单，对周期轨道在平面上的分布和分岔行为的确定带来极大的方便。因此，给出 DV 映射 n 次迭代的线性 Jacobi 矩阵的一般表达式，具有重要的意义。

DV 映射高次迭代的线性 Jacobi 矩阵，原则上可由复合函数微分方法通过矩阵乘法得到。但是随着 n 的增大，矩阵元的表达式越来越复杂和冗长。本文给出了一种简单的图形表示方法，可以准确无误地写出任意 n 次 DV 映射的线性 Jacobi 矩阵元，并给出了这种图形表示式的正确性的数学证明。

1 DV 映射线性 Jacobi 矩阵元的图形表示

设 DV 映射由(x_0,y_0)点出发的 n 次迭代的线性 Jacobi 矩阵的表示式是

$$L^{(n)}(x_0,y_0)\equiv\frac{\partial(x_n,y_n)}{\partial(x_0,y_0)}=\begin{pmatrix}L_{11}^{(n)} & L_{12}^{(n)}\\ L_{21}^{(n)} & L_{22}^{(n)}\end{pmatrix}\tag{2}$$

则根据复合函数微分方法，有

$$L^{(n+1)}(x_0,y_0)=\frac{\partial(x_{n+1},y_{n+1})}{\partial(x_n,y_n)}\cdot\frac{\partial(x_n,y_n)}{\partial(x_0,y_0)}=L^{(1)}(x_n,y_n)L^{(n)}(x_0,y_0)$$

若定义 $F_n=f'(x_n)$，可得

$$L^{(n+1)}(x_0,y_0)=\begin{pmatrix}F_n & -1\\ 1-F_nF_{n+1} & F_{n+1}\end{pmatrix}L^{(n)}(x_0,y_0)\tag{3}$$

由此得出诸矩阵元的递推关系为

$$\begin{cases}L_{11}^{(n+1)}=F_nL_{11}^{(n)}-L_{21}^{(n)};\ L_{12}^{(n+1)}=F_nL_{12}^{(n)}-L_{22}^{(n)}\\ L_{21}^{(n+1)}=(1-F_nF_{n+1})L_{11}^{(n)}+F_{n+1}L_{21}^{(n)}\\ L_{22}^{(n+1)}=(1-F_nF_{n+1})L_{12}^{(n)}+F_{n+1}L_{22}^{(n)}\end{cases}\tag{4}$$

把(4)式的递推关系分解为两组：

$$L_{11}^{(n+1)}=-L_{11}^{(n-1)}+2F_nL_{11}^{(n)};\ L_{21}^{(n+1)}=L_{11}^{(n)}-F_{n+1}L_{11}^{(n+1)}\tag{5}$$

和

$$L_{12}^{(n+1)}=-L_{12}^{(n-1)}+2F_nL_{12}^{(n)};\ L_{22}^{(n+1)}=L_{12}^{(n)}-F_{n+1}L_{12}^{(n+1)}\tag{6}$$

两组的初始条件分别为 $L_{11}^{(1)}=F_0$，$L_{11}^{(2)}=2F_0F_1-1$ 和 $L_{12}^{(1)}=-1$，$L_{12}^{(2)}=-2F_1$. 递推关系对 $n=0$ 和 1 不成立，因而给定初始条件。

由这些递推关系，原则上可以对任何 n 给出 $L^{(n)}(x_0,y_0)$的矩阵元。例如，

$$L^{(1)}=\frac{\partial(x_1,y_1)}{\partial(x_0,y_0)}=\begin{pmatrix}F_0 & -1\\ 1-F_0F_1 & F_1\end{pmatrix},$$

$$L^{(2)}=\frac{\partial(x_2,y_2)}{\partial(x_0,y_0)}=\begin{pmatrix}2F_0F_1-1 & -2F_1\\ F_0+F_2-2F_0F_1F_2 & 2F_1F_2-1\end{pmatrix},$$

$$L^{(3)}=\frac{\partial(x_3,y_3)}{\partial(x_0,y_0)}$$
$$=\begin{pmatrix} 4F_0F_1F_3-F_0-2F_2 & 1-4F_1F_2 \\ -4F_0F_1F_2F_3+2(F_0F_1+F_2F_3)+F_0F_3-1 & 4F_1F_2F_3-2F_1-F_3 \end{pmatrix},$$

等等。但是，随着 n 的增加，$L^{(n)}$的矩阵元作为 F_0，F_1，…，F_n 的函数的表达式变得非常复杂和冗长。能否用一个简洁而明晰的表达式将大 n 数的 $L^{(n)}$的各矩阵元写出来？这是我们感兴趣的问题。研究发现，利用一种简单的图形规则的确可以将任意正整数 n 的 $L^{(n)}$的矩阵元写出来。为说明起见，我们观察 $L^{(4)}(x_0,y_0)$的矩阵元

$$L_{11}^{(4)}=1-2F_0(F_1+F_3)-4F_2F_3+8F_0F_1F_2F_3 \tag{7a}$$

它可以表示成图形

$$\begin{tikzcd}
& & & & 1 \\
& & -1 \arrow[r] \arrow[dr] & F_0 \arrow[r] \arrow[dr] & 2F_1 \\
1 \arrow[r] & F_0 \arrow[r] & 2F_1 \arrow[r] & 2F_2 \arrow[r] & 2F_3
\end{tikzcd} \tag{7b}$$

对这个图形的约定是：图中由左向右的每一条可能的路径上的各个因子相乘之积对应着(7a)式中的一项。按照这种约定规则，$L^{(4)}$的其它三个矩阵元也可以分别表示成相应的三种图形，即

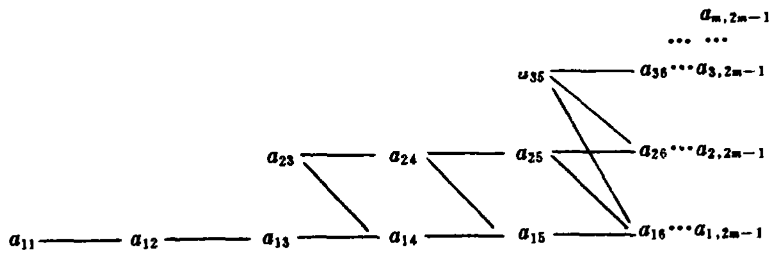
$$L_{12}^{(4)}=2F_1+2F_3-8F_1F_2F_3$$
$$=\begin{tikzcd}
& & 1 \arrow[r] \arrow[dr] & 2F_1 \\
-1 \arrow[r] & 2F_1 \arrow[r] & 2F_2 \arrow[r] & 2F_3
\end{tikzcd} \tag{8}$$

$$L_{21}^{(4)}=-1(F_0+F_4+2F_2)+4F_2(F_0F_1+F_3F_4)$$
$$+2F_0F_4(F_1+F_3)-8F_0F_1F_2F_3F_4$$
$$=\begin{tikzcd}
& & & & -1 \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] & F_0 \\
& & 1 \arrow[r] \arrow[dr] & F_0 \arrow[r] \arrow[dr] & 2F_1 \arrow[r] \arrow[dr] & 2F_2 \\
-1 \arrow[r] & F_0 \arrow[r] & 2F_1 \arrow[r] & 2F_2 \arrow[r] & 2F_3 \arrow[r] & F_4
\end{tikzcd} \tag{9}$$

$$L_{22}^{(4)}=1-4F_1F_2-2F_4(F_1+F_3)+8F_1F_2F_3F_4$$

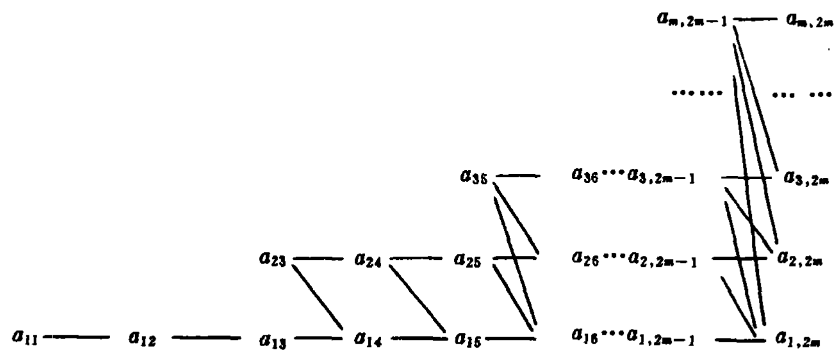
$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & & 1 \\
 & & -1 \arrow[r] \arrow[drr] & 2F_1 \arrow[r] \arrow[drr] & 2F_2 \\
=1 \arrow[r] & 2F_1 \arrow[r] & 2F_2 \arrow[r] & 2F_3 \arrow[r] & F_4
\end{tikzcd} \tag{10}$$

我们猜测，随着 n 的增加，$L^{(n)}$的各矩阵元可以用上述图形作相应的扩大而得到一般的表达式。注意到图形中每两列数之间的路径方向只可能是向右、向下或其间的方向。从每行左边第一个数出发的路径将取尽其右邻一列数中自本行以下的所有数。这种图形的数学表达式是



$$=\sum_{s=1}^{m}\sum_{(s=i_{2s-1}\geqslant\cdots\geqslant i_j\cdots i_{2m-1}\geqslant 1)}\prod_{j=2s-1}^{2m-1}a_{i_j,j} \tag{11a}$$

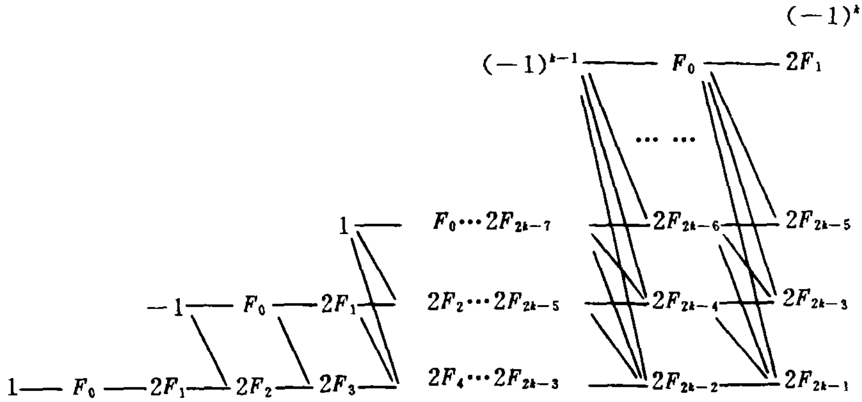
和



$$=\sum_{s=1}^{m}\sum_{(s=i_{2s-1}\geqslant\cdots\geqslant i_j\geqslant\cdots i_{2m}\geqslant 1)}\prod_{j=2s-1}^{2m}a_{i_j,j} \tag{11b}$$

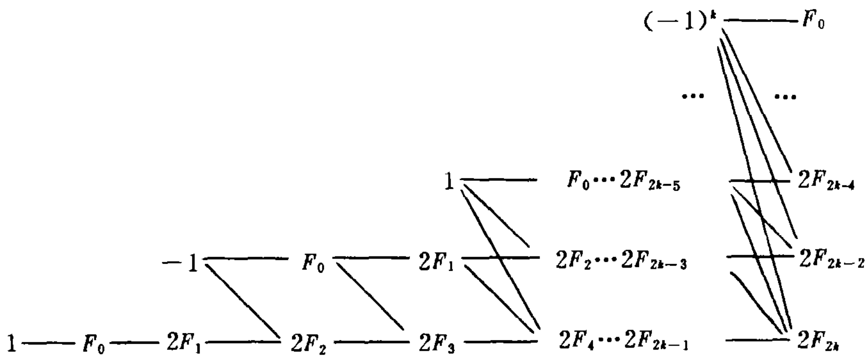
现在，我们能写出 $L^{(n)}$中各矩阵元的图形表示通式，例如 $L_{11}^{(2k)}$和 $L_{11}^{(2k+1)}$的图形表示是

$$L_{11}^{(2k)}=\frac{\partial x_{2k}}{\partial x_0}=$$



(12a)

$$L_{11}^{(2k+1)}=\frac{\partial x_{2k+1}}{\partial x_0}=$$

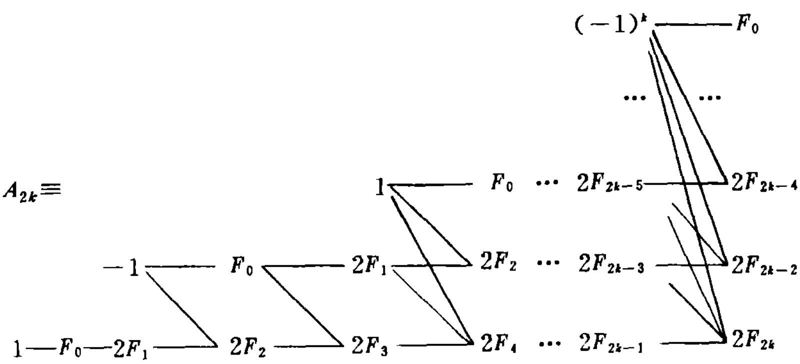


(12b)

2 $L^{(n)}$图形表示式的数学证明

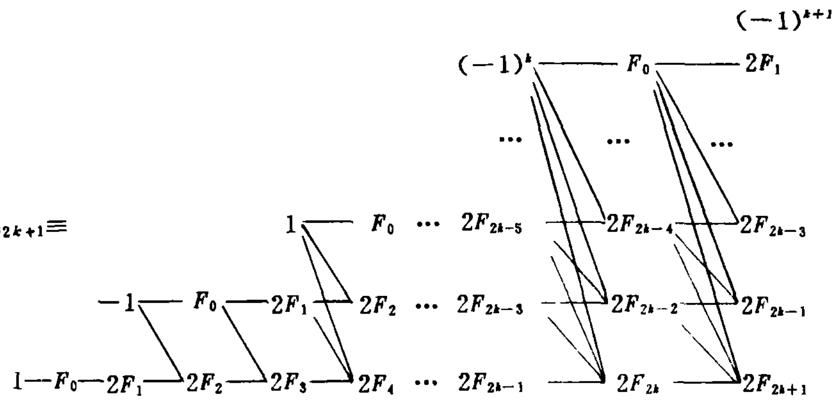
如果$L^{(n)}$的通项公式是正确的，那么它们必须满足递推关系(5)或(6)。现在来证明这一点。我们定义

$A_{2k}\equiv$



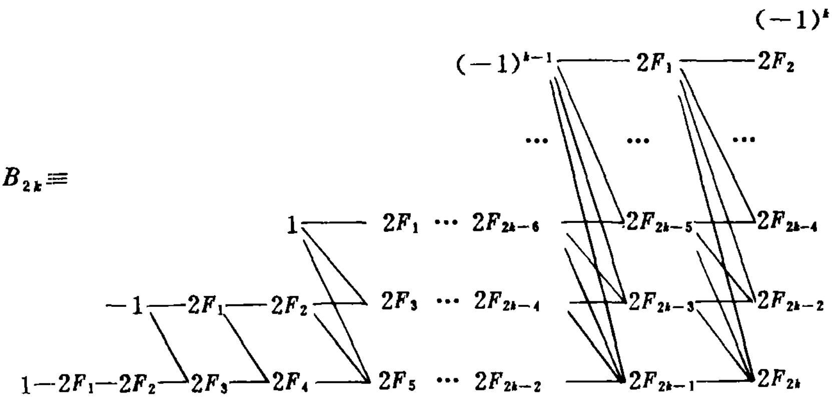
(13a)

$A_{2k+1}\equiv$



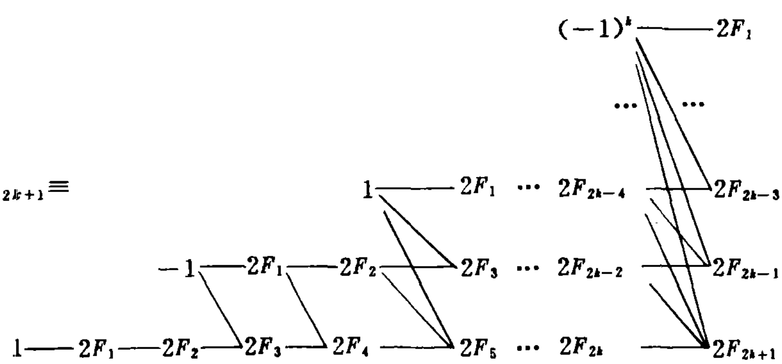
(13b)

$B_{2k}\equiv$



(14a)

$B_{2k+1}\equiv$



(14b)

注意到按构图规则所组成的三角形数阵 A_n 和 B_n 都可表示为去掉最下一行的三角阵加上去掉最右一列的三角阵与最右下角的元素的乘积，因此所定义的 A_n 和 B_n 具有递推关系，即

$$A_n=-A_{n-2}+2F_nA_{n-1};\quad B_n=-B_{n-2}+2F_nB_{n-1} \tag{15}$$

利用 A_n 和 B_n 可把 $L^{(n+1)}$的矩阵元表示式简洁地写作

$$\begin{cases} L_{11}^{(n+1)} = A_n;\ L_{12}^{(n+1)} = -B_n \\ L_{21}^{(n+1)} = A_{n-1} - F_{n+1}A_n;\ L_{22}^{(n+1)} = -B_{n-1} + F_{n+1}B_n \end{cases} \tag{16}$$

现在把递推关系(15)式代入到(16)式中，立即可以得到矩阵元的递推关系(5)与(6)式。因此，所猜测的 DV 映射 n 次迭代线性 Jacobi 矩阵元的图形表示式获得证明。递推关系(15)式的初始条件为

$$A_0 = F_0,\ B_0 = 1,\ A_1 = 2F_0F_1 - 1,\ B_1 = 2F_1.$$

对 $n=0$ 和 1 递推关系不适用，即

$$n \neq 0, 1.$$

参 考 文 献

[1] Berry M V. Topics in Nonlinear Dynamics. ed, Jorna S. Am. Inst. Phys. Conf. Proc. A. I. P., New York, 1978, 46: 16

[2] Birkhoff G B. Dynamical Systems. AMS Colloquium Publications, 1966, 9: 115

[3] Moser J k. Stable and Random Motions in Dynamical Systems. Princeton University Press, 1973, 34

[4] De Vogelaere R. Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations. ed, lefschetz S, 1958, 4: 53

[5] Greene J M, et al. Physica, 1981, 3D: 468

[6] Bountis T C. Physica, 1981, 3D: 577

[7] Helleman R G H. Fundamental Problems in Statistical Mechanics. ed, Cohen E G D, Amsterdam, North-Holland, 1980, 5: 165

[8] Zisook A B. Phys. Rev., 1981, 24A: 1640

[9] Lee K C. J. Phys, 1983, 16A: L137

[10] Chirikov B V. Phys. Reports, 1979, 52: 263

The Diagram Representatives of Linear Jacobian Matrices for De Vogelaere Map

Wang Binghong

(China University of Science and Technology)

Liu Wuming

(Mengzi Teachers' Institute)

Lan Maqun

(National University of Defence Technology)

Abstract

This paper gives the diagram representatives and mathematical proof of linear *jacobian* matrics for the n-th iteration of *De Vogelaere* map which is reversible preserving-area.

Key words *De Vogelaere* map, *Jacobian* matrics