国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第14卷第2期　1992年6月　Vol. 14 No. 2

弹性地基上的矩形板弯曲问题的解析解法

黄　炎

（航天技术系）

摘　要　本文建立了弹性地基上的矩形板弯曲微分方程的一般解。然后根据各种边界条件确定积分常数，这一解法可以求解任意载荷作用下任意边界矩形板的弯曲问题。以四边自由中点受一集中力的正方形板为例进行了分析求解。

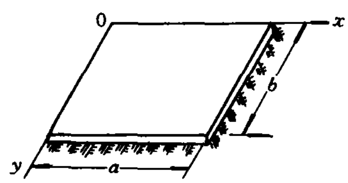
关键词　弹性地基，弯曲

分类号　O343.1

1　微分方程的解

如附图所示，弹性地基上的矩形板弯曲的微分方程为[1]

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\frac{k}{D}w=\frac{q}{D} \tag{1}$$



附图

当四边为简支时、可取双正弦级数解：

$$w=\sum_m\sum_n A_{mn}\sin\alpha x\sin\beta y \tag{2}$$

式中，

$$A_{mn}=\frac{4\int_0^a\int_0^b q\sin\alpha x\sin\beta y dxdy}{ab[D(\alpha^2+\beta^2)^2+k]} \tag{3}$$

$$\alpha=\frac{m\pi}{a},\quad \beta=\frac{n\pi}{b},\quad m=1,2,3\cdots;\quad n=1,2,3\cdots$$

作为(1)式的特解，也可取双余弦级数解，或单三角级数解以及代数多项式的解。方程(1)的齐次解可采用分离变量法来求解[2]。设 $w=XY$，$q=0$ 代入(1)式可得

$$Y\frac{\partial^4 X}{\partial x^4}+2\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}+X\frac{\partial^4 Y}{\partial y^4}+\frac{k}{D}XY=0 \tag{4}$$

将上式除以 XY，然后对 y 微分一次得

$$\frac{X''}{X}=-\frac{1}{2}\left(\frac{Y^{\mathrm{IV}}}{Y}\right)'\Big/\left(\frac{Y''}{Y}\right)'$$

上式两边必为一常数。设为 $-\alpha^2$，故有

* 1990年11月13日收稿

$$X'' + \alpha^2 X = 0 \tag{5}$$

上式的解分为两种情形：

(1) 当 α 为零时可得

$$X = A_1 + A_2 x \tag{6}$$

将上式代入 (4) 式可得

$$Y^{IV} + \frac{k}{D} Y = 0 \tag{7}$$

上式特征方程的根为$\pm(1\pm i)r$，即

$$Y = B_1 \mathrm{sh} ry \sin ry + B_2 \mathrm{ch} ry \sin ry + B_3 \mathrm{sh} ry \cos ry + B_4 \mathrm{ch} ry \cos ry \tag{8}$$

式中，　$4r^4 = \frac{k}{D}$

(2) 当 α 不为零时，由 (5) 式得

$$X = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x \tag{9}$$

将上式代入(4)式可得

$$Y^{IV} - 2\alpha^2 Y'' + (\alpha^4 + 4r^4) Y = 0$$

上式特征方程的根为$\pm\alpha_1 \pm i\alpha_2$，即

$$Y = D_1 \mathrm{sh}\alpha_1 y \sin\alpha_2 y + D_2 \mathrm{ch}\alpha_1 y \sin\alpha_2 y + D_3 \mathrm{sh}\alpha_1 y \cos\alpha_2 y + D_4 \mathrm{ch}\alpha_1 y \cos\alpha_2 y \tag{10}$$

式中，

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\alpha^4 + 4r^4} \pm \alpha^2} \tag{11}$$

如将(4)式除以 XY，然后对 x 微分一次，则同样可得相似的另一类解。另外，如令 $k=q=0$，可以求得方程(1)的代数多项式的解为[3]

$$w_1 = a_{00} + a_{10}\frac{x}{a} + a_{01}\frac{y}{b} + a_{11}\frac{xy}{ab} + a_{20}\frac{x^2}{a^2} + a_{02}\frac{y^2}{b^2} + a_{21}\frac{x^2 y}{a^2 b} + a_{12}\frac{xy^2}{ab^2} + a_{30}\frac{x^3}{a^3} + a_{03}\frac{y^3}{b^3} + a_{31}\frac{x^3 y}{a^3 b} + a_{13}\frac{xy^3}{ab^3} \tag{12}$$

上式也是方程(1)的特解。将上式代入(1)式可得相应的载荷是

$$q = k\left(a_{00} + a_{10}\frac{x}{a} + a_{01}\frac{y}{b} + a_{11}\frac{xy}{ab} + a_{20}\frac{x^2}{a^2} + a_{02}\frac{y^2}{b^2} + a_{21}\frac{x^2 y}{a^2 b} + a_{12}\frac{xy^2}{ab^2} + a_{30}\frac{x^3}{a^3} + a_{03}\frac{y^3}{b^3} + a_{31}\frac{x^3 y}{a^3 b} + a_{13}\frac{xy^3}{ab^3}\right)$$

如欲成为方程(1)的齐次解，令 q 等于上式的负值代入(3)式，则由(2)式可得

$$\begin{aligned} w_2 = -\sum_m \sum_n \frac{4k}{D(\alpha^2+\beta^2)^2+k} \Bigg\{ & a_{00}\frac{1-\cos m\pi}{m\pi}\,\frac{1-\cos n\pi}{n\pi} - a_{10}\frac{\cos m\pi}{m\pi}\,\frac{1-\cos n\pi}{n\pi} \\ & - a_{01}\frac{1-\cos m\pi}{m\pi}\,\frac{\cos n\pi}{n\pi} + a_{11}\frac{\cos m\pi}{m\pi}\,\frac{\cos n\pi}{n\pi} - a_{20}\left[1-\frac{2(1-\cos m\pi)}{(m\pi)^2}\right]\frac{\cos m\pi}{m\pi}\,\frac{1-\cos n\pi}{n\pi} \\ & - a_{02}\left[1-\frac{2(1-\cos n\pi)}{(n\pi)^2}\right]\frac{\cos n\pi}{n\pi}\,\frac{1-\cos m\pi}{m\pi} + a_{21}\left[1-\frac{2(1-\cos m\pi)}{(m\pi)^2}\right]\frac{\cos m\pi}{m\pi}\,\frac{\cos n\pi}{n\pi} \\ & + a_{12}\left[1-\frac{2(1-\cos n\pi)}{(n\pi)^2}\right]\frac{\cos m\pi}{m\pi}\,\frac{\cos n\pi}{n\pi} - a_{30}\left[1-\frac{6}{(m\pi)^2}\right]\frac{\cos m\pi}{m\pi}\,\frac{1-\cos n\pi}{n\pi} \\ & - a_{03}\left[1-\frac{6}{(n\pi)^2}\right]\frac{\cos n\pi}{n\pi}\,\frac{1-\cos m\pi}{m\pi} + a_{31}\left[1-\frac{6}{(m\pi)^2}\right]\frac{\cos m\pi}{m\pi}\,\frac{\cos n\pi}{n\pi} \end{aligned}$$

$$+a_{13}\left[1-\frac{6}{(n\pi)^2}\right]\frac{\cos m\pi}{m\pi}\frac{\cos n\pi}{n\pi}\Bigg\}\sin\alpha x\sin\beta y \tag{13}$$

叠加(12)式和(13)式即为方程(1)的齐次解。适当选取各种解的线性组合可以求解各种载荷作用下各种不同边界的弹性地基上的矩形板的弯曲问题。

2 一般解的建立

满足任意载荷作用下，四边以及四角为任意边界条件的弹性地基上的矩形板弯曲问题的一般解，本文取为：

$$\begin{aligned}
w = &\sum_m\left[A_m\frac{\text{sh}\alpha_1(b-y)}{\text{sh}\alpha_1 b}\frac{\sin\alpha_2(b-y)}{\sin\alpha_2 b}+B_m\frac{\text{sh}\alpha_1(b-y)}{\text{sh}\alpha_1 b}\frac{\sin\alpha_2 y}{\sin\alpha_2 b}\right.\\
&\left.+C_m\frac{\text{sh}\alpha_1 y}{\text{sh}\alpha_1 b}\frac{\sin\alpha_2(b-y)}{\sin\alpha_2 b}+D_m\frac{\text{sh}\alpha_1 y}{\text{sh}\alpha_1 b}\frac{\sin\alpha_2 y}{\sin\alpha_2 b}\right]\sin\alpha x\\
&+\sum_n\left[E_n\frac{\text{sh}\beta_1(a-x)}{\text{sh}\beta_1 a}\frac{\sin\beta_2(a-x)}{\text{xin}\beta_2 a}+F_n\frac{\text{sh}\beta_1(a-x)}{\text{sh}\beta_1 a}\frac{\sin\beta_2 x}{\sin\beta_2 a}\right.\\
&\left.+G_n\frac{\text{sh}\beta_1 x}{\text{sh}\beta_1 a}\frac{\sin\beta_2(a-x)}{\sin\beta_2 a}+H_n\frac{\text{sh}\beta_1 x}{\text{sh}\beta_1 a}\frac{\sin\beta_2 x}{\sin\beta_2 a}\right]\sin\beta y\\
&+w_1+w_2+\sum_m\sum_n A_{mn}\sin\alpha x\sin\beta y
\end{aligned} \tag{14}$$

式中，

$$\beta_{1,2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{\beta^4+4r^4}\pm\beta^2} \tag{15}$$

将(10)式和上式的第一部分比较，用 $\text{sh}\alpha_1(b-y)$ 来代替 $\text{ch}\alpha_1 y$ 是为了避免当 $\alpha_1 y$ 很大的 $\text{sh}\alpha_1 y$ 将和 $\text{ch}\alpha_1 y$ 趋于相同。致于采用正弦和双曲线正弦而不用余弦和双曲线余弦以及增加除数 $\text{sh}\alpha_1 b$ 和 $\sin\alpha_2 b$ 仅仅是为了使演算可以简单些。另外也可以采用(6)式和(8)式的乘积组成十二个特解[2]来代替 w_1+w_2. 但采用后者则简单得多。

(14)式的第一部分可满足 $y=0$ 和 $y=b$ 两个边为任意边界条件；第二部分可满足 $x=0$ 和 $x=a$ 两个边为任意边界条件。由于此时四个角的挠度和弯矩恒 为零，故补充 w_1+w_2. 它可满足四个角为任意的角点条件。采用(2)式作特解可满足载荷的任意作用。虽然该级数收敛性差，但可通过数学演算来改善收敛速度。

(14)式共有 $4m+4n+12$ 个积分常数。这可由边界条件来确定。其中每个边有二个边界条件：即挠度或等效剪力，斜度或弯矩均应分别等于边界的已知值。在每个边界条件所建立的方程式中将非正弦函数均展成正弦级数。根据正交性可得到 $4m+4n$ 个方程式。另外每个角有三个角点条件：即挠度或反力，角的两边的斜度或弯矩均应分别等于相应的已知值。故又有 4×3 个方程式。因此可以求解全部积分常数。(14)式中的非正弦函数可展成如下的正弦级数

$$\frac{\text{sh}\alpha_1 y}{\text{sh}\alpha_1 b}\frac{\cos\alpha_2 y}{\sin\alpha_2 b}=-\sum_n\frac{2\beta}{b}\frac{(\alpha_2+\beta^2)\text{ctg}\alpha_2 b+2r^2\text{cth}\alpha_1 b}{(\alpha^2+\beta^2)^2+4r^4}\cos n\pi\sin\beta y \tag{16}$$

$$\frac{\text{ch}\alpha_1 y}{\text{sh}\alpha_1 b}\frac{\sin\alpha_2 y}{\sin\alpha_2 b}=-\sum_n\frac{2\beta}{b}\frac{(\alpha^2+\beta^2)\text{cth}\alpha_1 b-2r^2\text{ctg}\alpha_2 b}{(\alpha^2+\beta^2)^2+4r^4}\cos n\pi\sin\beta y \tag{17}$$

$$\frac{\mathrm{ch}\alpha_1 y}{\mathrm{sh}\alpha_1 b}\frac{\cos\alpha_2 y}{\sin\alpha_2 b}=-\sum_n \frac{2\beta}{b}$$

$$\cdot\frac{(\alpha^2+\beta^2)(\mathrm{cth}\alpha_1 b\,\mathrm{ctg}\alpha_2 b\cos n\pi-1/\mathrm{sh}\alpha_1 b\sin\alpha_2 b)+2r^2\cos n\pi}{(\alpha^2+\beta^2)^2+4r^4}\sin\beta y \tag{18}$$

$$\frac{\mathrm{sh}\alpha_1 y}{\mathrm{sh}\alpha_1 b}\frac{\sin\alpha_2 y}{\sin\alpha_2 b}=-\sum_n \frac{2\beta}{b}$$

$$\cdot\frac{(\alpha^2+\beta^2)\cos n\pi-2r^2(\mathrm{cth}\alpha_1 b\,\mathrm{ctg}\alpha_2 b\cos n\pi-1/\mathrm{sh}\alpha_1 b\sin\alpha_2 b)}{(\alpha^2+\beta^2)^2+4r^4}\sin\beta y \tag{19}$$

3 例 题

以四边自由，中点承受一集中力的弹性地基上的正方形板为例。边界条件是：

$$(M_x)_{x=0}=0,\quad (M_x)_{x=a}=0 \tag{20}$$

$$(M_y)_{y=0}=0,\quad (M_y)_{y=b}=0 \tag{21}$$

$$(V_x)_{x=0}=0,\quad (V_x)_{x=a}=0 \tag{22}$$

$$(V_y)_{y=0}=0,\quad (V_y)_{y=b}=0 \tag{23}$$

式中，$M_x=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$；$M_y=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$；

$$V_x=-D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right];\ V_y=-D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right]$$

角点条件是

$$R_{(0,0)}=0,\ R_{(0,0)}=0,\ R_{(0,b)}=0,\ R_{(a,b)}=0 \tag{24}$$

$$M_{x(0,0)}=0,\ M_{x(a,0)}=0,\ M_{x(0,b)}=0,\ M_{x(a,b)}=0 \tag{25}$$

$$M_{y(0,0)}=0,\quad M_{y(a,0)}=0,\quad M_{y(0,b)}=0,\quad M_{y(a,b)}=0 \tag{26}$$

式中，　$R=2D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$

利用对称可使求解问题大大简化，对于中线 $x=\frac{a}{2}$ 和 $y=\frac{b}{2}$ 为对称的变形应有

$$w_{x=0}=W_{x=a},\quad W_{y=0}=W_{y=b} \tag{27}$$

$$w_{(0,0)}=w_{(a,0)}=w_{(0,b)}=w_{(a,b)} \tag{28}$$

对于正方形板的情形，由对角线 $x=y$ 的对称条件又有

$$w_{x=0}=w_{y=0} \tag{29}$$

将(12)式和(13)式代入(14)式，然后代入以上各式。首先由(25)式和(26)式可得

$$a_{20}=a_{02}=a_{21}=a_{12}=a_{30}=a_{03}=a_{31}=a_{13}=0$$

由(28)式可得

$$a_{10}=a_{01}=a_{11}=0$$

由(27)式又可得

$$E_n=H_n,\quad A_m=D_m$$

由(20)式和(21)式，可得

$$F_n = G_n = \frac{E_n}{\mathrm{ch}\beta_1 a + \cos\beta_2 a}\left(\frac{1-\nu}{2}\frac{\beta^2}{r^2}\mathrm{sh}\beta_1 a\sin\beta_2 a + \mathrm{ch}\beta_1 a\cos\beta_2 a + 1\right)$$

$$B_m = C_m = \frac{A_m}{\mathrm{ch}\alpha_1 b + \cos\alpha_2 b}\left(\frac{1-\nu}{2}\frac{\alpha^2}{r^2}\mathrm{sh}\alpha_1 b\sin\alpha_2 b + \mathrm{ch}\alpha_1 b\cos\alpha_2 b + 1)\right)$$

当中点受一集中力 P 时，由(3)式可得

$$A_{mn} = \frac{4P\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}}{ab[D(\alpha^2+\beta^2)^2+k]}$$

应用上式，则由(22)的第一式和(24)的第一式，并应用到(16)式至(19)式可得

$$\sum_m A_m \frac{4\alpha\beta}{b}\frac{(2-\nu)4r^4-(1-\nu)^2\alpha^2\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2+4r^4} - \frac{E_n}{2r^2(\mathrm{ch}\beta_1 a+\cos\beta_2 a)}$$
$$\Big\{[(1-\nu)^2\beta^4\beta_2 - 4(1-\nu)r^2\beta^2\beta_1 - 4r^4\beta_2]\mathrm{sh}\beta_1 a$$
$$+ [(1-\nu)^2\beta^4\beta_1 + 4(1-\nu)r^2\beta^2\beta_2 - 4r^4\beta_1]\sin\beta_2 a$$
$$+ \frac{16a_{00}k}{Dab\beta}\sum_m\frac{\alpha^2+(2-\nu)\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2+4r^4} - \frac{4P}{Dab}\sin\frac{n\pi}{2}\sum_m \alpha\sin\frac{m\pi}{2}\frac{\alpha^2+(2-\nu)\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)+4r^4}\Big\} = 0 \tag{30}$$

$$\sum_m A_m\left[\alpha_1\left(\mathrm{cth}\alpha_1 b + \frac{1}{\mathrm{sh}\alpha_1 b}\right) + \alpha_2\left(\mathrm{chg}\alpha_2 b + \frac{1}{\sin\alpha_2 b}\right)\right] + \sum_n E_n\left[\beta_1\left(\mathrm{cth}\beta_1 a + \frac{1}{\mathrm{sh}\beta_1 a}\right)\right.$$
$$\left.+ \beta_2\left(\mathrm{ctg}\beta_2 a + \frac{1}{\sin\beta_2 a}\right)\right] + \frac{16a_{00}k}{Dab}\sum_m\sum_n\frac{1}{(\alpha^2+\beta^2)^2+4r^4}$$
$$- \frac{4P}{Dab}\sum_m\sum_n\frac{\alpha\beta\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}}{(\alpha^2+\beta^2)^2+4r^4} = 0 \tag{31}$$

式中，m 和 n 仅取奇数值。由(23)的第一式还可以求得和(30)式相似的等式。对于正方形板，由于 $a=b$，取 m 和 n 相等的项数，则由(29)式可得

$$E_n = A_n$$

将上式代入(30)式和(31)式即可求得 A_m 和 a_{00}. 取 $\nu=0.167$，$m=1,2,\cdots,35$，求得板中点和角点的挠度分别为 $w=0.00125\frac{Pa^2}{D}$ 和 $w=-0.00001\frac{Pa^2}{D}$. 文献[1]采用叠加法来求解这一例题时，取 $a_{00}=C$，同时对一些级数进行了求和，由于控制方程中另一些级数收敛性差，所以仅改善了部分级数的收敛性，对整体计算仍未得到改善。

弹性地基上的板的弯曲问题，过去多采用寻求微分方程的各种特解，相应地求解了各种简单的问题[4]。采用迭加法则可以进一步求解各种复杂的问题[1]，但演算过程复杂，难于掌握运用。作者采用先建立微分方程的一般解，然后根据各种边界条件确定积分常数，它可以求解任意载荷作用下任意边界矩形板的问题，演算过程比较简单，易于明了和掌握运用。

4 讨 论

如前所述，采用(16)式和(17)式的乘积组成十二个特解来代替(14)式中的 w_1+w_2，

不如采用(12)式和(13)式。对于板的自由振动，其位型函数的微分方程为[2]

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-\frac{\rho w^2}{D}w=0$$

将上式和(1)式比较，由于 ρw^2和 k 均为常数，取

$$k=-\rho w^2,q=0$$

则两式完全一样。因此，在文献 [2] 中如将板的一般解中含 A，B，…，L 等十二项的和改用本文(12)式和(13)式的和，同时仅在(13)式中将 k 改为 $-\rho w_2$，则求解将简单很多。

参 考 文 献

1 张福范．弹性薄板．科学出版社，1984

2 黄炎．矩形薄板弹性振动的一般解析解．应用数学和力学，1988，9(11)

3 卡尔曼诺克．薄板结构力学．建筑工程出版社，1959

4 Timoshenko S. Theory of Plates and Shells. McGRAW－HILL BOOK COMPANY, INC, 1940

Analytical Method for Solving Bending Problem of Rectangular Plates on Elastic Foundations

Huang Yan

(Department of Aerospace Technology)

Abstract

This paper gives a general solution of differential equation for solving bending problem of rectangular plates on elastic foundations. It can be used to solve the bending problem of rectangular plates with arbitrary edges under arbitrary load. For example, a square plate with four edges free and loaded a concentrated load at the center is discussed.

Key words elastic foundation, bending