国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第14卷第4期 1992年12月 Vol. 14 No. 4

粘弹性泊松比的各种表述方法*

郝松林

(航天技术系)

摘 要 本文讨论线性粘弹泊松比的四种表述法：微分算子法、遗传积分法、复数表示法和经验表示法的实用价值和问题。为固体推进剂力学性态的描述提供了方便。

关键词 弹性，粘弹性，泊松比

分类号 O343.6

线弹性泊松比是常数，而粘弹性泊松比是时间的函数，并同温度有关。固体火箭药柱应力分析结果受泊松比取值的影响很大[1,2]。本文侧重讨论粘弹泊松比的表述方法与有关结论。

等温、各向同性粘弹性时域的泊松比定义为：

$$\upsilon(t) = -\varepsilon_y(t)/\varepsilon_x(t) \tag{1}$$

式中，ε_y，ε_x 为纵向与横向应变，t 为时间，以上定义适用于有限变形与非线性粘弹材料，是直接测试法的基础[3,4]。由于泊松比仅限于线弹性概念，故（1）式更准确的名称为“收缩比”。

根据对应原理[5]，把线弹性力学中泊松比表达式[6]改写为 Laplace 变换后的粘弹性象域泊松比：

$$\bar{\upsilon}(s) = \frac{\overline{E}}{2\overline{G}} - 1 = \frac{\overline{J}}{2\overline{D}} - 1 = \frac{1}{2} - \frac{\overline{E}}{\overline{K}} = \frac{1}{2} - \frac{\overline{E}\,\overline{B}}{6} = \frac{3\overline{K} - 2\overline{G}}{6\overline{K} + 2\overline{G}} \tag{2}$$

其中 $\bar{\varphi} = \int_0^\infty \varphi(t)\exp(-st)dt$ 为函数 $\varphi(t)$ 的 Laplace 变换。$\overline{E}$、$\overline{G}$、$\overline{K}$ 和 $\overline{D}$、$\overline{J}$、$\overline{B}$ 分别代表材料的拉伸，剪切、体积松弛模量与蠕变柔量。

1 微分算子表述[7]

应力及应变张量 σ_{ij}、ε_{ij}的偏量、球量分解表达式为（s_{ij}、e_{ij}为偏量）：

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}, \varepsilon_{ij} = e_{ij} + \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \tag{3}$$

式中，δ_{ij}当 Kronesker 函数，重复下标隐含求和，代入线粘弹微分算子本构关系，得到

$$\begin{cases} P_1[s_{ij}] = 2G_0Q_1[e_{ij}] & \text{（剪切变形）} \\ P_2[\sigma_{kk}] = 3K_0Q_2[\varepsilon_{kk}] & \text{（体积胀缩）} \end{cases} \tag{4}$$

* 1992年1月18日收稿

式中，$P_1[\ ]=\sum_{m=1}^{n}P_m\partial^{(m)}(\ )/\partial t^{(m)}$，$Q_1[\ ]=\sum_{m=1}^{n}q_m\partial^{(m)}(\ )/\partial t^{(m)}$，$P_2[\ ]=\sum_{m=1}^{n}P'_m\partial^{(m)}(\ )/\partial t^{(m)}$，$Q_2[\ ]=\sum_{m=1}^{n}q'_m\partial^{(m)}(\ )/\partial t^{(m)}$，都是常系数时域微分算子。对于任意载荷作用下的单轴拉伸情况($\sigma_x=\sigma_x(t)$，$\sigma_y=\sigma_z=0$)，由(4)式和(1)式可以推出

$$\upsilon(t)=-\frac{L^{-1}\left[\left(\frac{1}{9K_0}\frac{\overline{P}_2}{\overline{Q}_2}-\frac{1}{6G_0}\frac{\overline{P}_1}{\overline{Q}_1}\right)\bar{\sigma}_x\right]}{L^{-1}\left[\left(\frac{1}{9K_0}\frac{\overline{P}_2}{\overline{Q}_2}+\frac{1}{3G_0}\frac{\overline{P}_1}{\overline{Q}_1}\right)\bar{\sigma}_x\right]} \tag{5}$$

式中，L^{-1}为 Laplace 逆变换算符，上式已表明$\upsilon(t)$随时间变化的具体形式取决于作用历史$\sigma_x(t)$及P_1、Q_1、P_2、Q_2的选择。类似地，如果用给定应变$\varepsilon_x(t)$加载，则有

$$\nu(t)=-L^{-1}\left[\frac{\left(\frac{1}{9K_0}\frac{\overline{P}_2}{\overline{Q}_2}-\frac{1}{6G_0}\frac{\overline{P}_1}{\overline{Q}_1}\right)}{\left(\frac{1}{9K_0}\frac{\overline{P}_2}{\overline{Q}_2}+\frac{1}{3G_0}\frac{\overline{P}_1}{\overline{Q}_1}\right)}\bar{\varepsilon}_x\right]/\varepsilon_x(t) \tag{6}$$

假定线性粘弹材料是弹性可压的（$\overline{P}_2=\overline{Q}_2=1$)，其剪切流变规律用 Voigt 二元件模型描述（$\overline{P}_1=1$，$\overline{Q}_1=1+\tau s$，$\tau=\eta/E$，η 及 E 为 Voigt 模型参数）。考虑三种实验条件：(1)蠕变试验：$\sigma_x=\sigma_0H(t)$，$H(t)$为单位阶跃函数；(2)松弛试验：$\varepsilon_x=\varepsilon_0H(t)$；(3)定速拉伸：$\varepsilon_x=ct$，$c$ 为试验机夹头移动速度。把式(1)代入式(5)、式(2)、式(3)代入式(6)，分别求出对应的粘弹泊松比为：

$$\nu_c(t)=(3(1-\exp(-t/\tau))-2\xi)/(6(1-\exp(-t/\tau))+2\xi) \tag{7}$$

$$\nu_r(t)=(1-(2/3)\xi-3\exp(-(1+3\xi)t/\tau))/(2(1+\xi/3)) \tag{8}$$

$$\nu_a(t)=(a+(b+(\exp(-d\cdot t/\tau))/(t/\tau) \tag{9}$$

式中，$a=(3-2\xi)/(6+2\xi)$，$b=-c=18\xi/(6+2\xi)^2$，$d=(3+\xi)/\zeta$.

表 1　不同加载历史下的粘弹泊松比

t/τ	0	0.1	0.2	0.3	1.5	1.0	1.5	3.0	5.0	10.0	∞
ν_c	−1	−0.778	−0.591	−0.439	−0.193	0.144	0.284	0.377	0.384	0.384	0.3846
ν_r	−1	−0.200	0.028	0.135	0.238	0.325	0.355	0.368	0.384	0.384	0.3846
ν_a	−1	−0.390	−0.108	0.037	0.172	0.278	0.314	0.349	0.363	0.374	0.3846

由此可见$\nu_r(0)=\nu_c(0)=\nu_a(0)=-1$，$\nu_c(\infty)=\nu_r(\infty)=\nu_a(\infty)=(3-2\xi)/(6+2\xi)$。取$\xi=G_0/K_0=0.25$，由(7)～(9)式算出不同加载条件下的$\upsilon(t)$值如表 1 所示。表 2 就不同$\xi$值，算出$\nu_r(t)$的变化规律，这说明玻璃态（$t=0$）和弹胶态（$t=\infty$）下的泊松比与时间无关，粘弹区泊松比是时间和加载历史的函数，表 2 中$\xi=0$为不可压缩材料，$\nu\equiv1/2$，近不可压缩时$\nu_r(t)\rightarrow0.5$. 负泊松比的出现，是由于选用 Voigt 模型不完备（不能刻画瞬态弹性响应），若用广义 Maxwell 模型描述剪切流变响应，则由（6）式求出：

$$\nu_r(t)=\frac{1}{2}-(\sum_{i=1}^{m}E_i\exp(-t/\tau_i))6K_0$$

$$\nu_r(0)=\frac{1}{2}-\sum_{i=1}^{m}E_i/6K_0,\nu_r(\infty)=\frac{1}{2}$$

表 2　粘弹泊松比的理论取值范围

t/τ \ ζ	0.01	0.25	0.33	0.50	0.75	1.00	1.50	∞
0	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1
0.01	0.001	−0.224	−0.876	−0.915	−0.943	−0.957	−0.971	−1
0.1	0.449	−0.200	−0.308	−0.455	−0.586	−0.667	−0.760	−1
0.2	0.473	0.028	−0.070	−0.219	−0.369	−0.471	−0.600	−1
0.5	0.490	0.238	0.170	0.054	−0.082	−0.188	−0.339	−1
1.0	0.492	0.325	0.276	0.187	0.075	−0.017	−0.162	−1
1.5	0.4936	0.355	0.312	0.235	0.135	0.050	−0.087	−1
2.0	0.4944	0.368	0.329	0.258	0.164	0.083	−0.050	−1
3.0	0.4947	0.379	0.343	0.276	0.188	0.110	−0.017	−1
5.0	0.4949	0.384	0.349	0.284	0.198	0.123	−0.002	−1
10.0	0.4950	0.384	0.349	0.285	0.199	0.125	−0.00002	−1
∞	0.5000	0.3846	0.3499	0.2857	0.2000	0.1428	0.0000	−1

热力学上已经证明：各向同性线弹性材料泊松比的取值范围是$-1\leqslant\nu\leqslant 1/2$[6]，从工程观点上看是否存在$\nu<0$的材料，一直有所争议，但最近已报导：可以制造出$\upsilon=-0.7$的泡沫塑料[8]，上面的计算中$\upsilon(t)$是随时间单调递升的，但选用其它模型描述，$P_1$，$Q_1$，$P_2$，$Q_2$求出的$\upsilon(t)$，可以是非单调变化的[7]。

2　积分表述法

可以用以下三种形式的遗传积分引入粘弹性泊松比。

$$-\varepsilon_y(t)=\int_{-\infty}^{t}\nu(t-\tau)\frac{d\varepsilon_x(\tau)}{d\tau}d\tau=\nu_g\varepsilon_x(t)+\int_0^t\nu(t-\tau)\frac{d\varepsilon_x(\tau)}{d\tau}d\tau$$

$$=\nu_g\varepsilon_x(t)+\int_0^t\frac{d\nu(t-\tau)}{d\tau}\varepsilon_x(\tau)d\tau \qquad (11)$$

上式表明：横向收缩响应滞后于纵向变形历史$\varepsilon_x(\tau)$，$\nu(t)$是以上积分的核函数——横向变形记忆函数，为使上式适应直接应用弹性/粘弹性对应原理，要另辟直接表达$\nu(t)$的途径，定义像域泊松比$\bar{\upsilon}_c=-\bar{\varepsilon}_y/\bar{\varepsilon}_x$，而$\bar{\varepsilon}_x=\bar{\sigma}_x/E(s)$，蠕变试验中$\bar{\sigma}_x=\sigma_0/s$，则可导出

$$\bar{\upsilon}_c=-\bar{\varepsilon}_y sE(s)/\sigma_0 \qquad (12)$$

对上式两边求逆，并利用卷积求逆的性质，有

$$\upsilon_c(t)=-\frac{1}{\sigma_0}\left[\varepsilon_y(0)E(t)+\int_0^t E(t-\tau)\frac{d\varepsilon_y(t)}{d\tau}d\tau\right. \qquad (13)$$

式中$E(t)$为松弛模量。上式给出从$\varepsilon_y(t)$、$E(t)$试验值求$\nu_c(t)$的途径。如令它们为Prony级数

$$\begin{cases}E(t)=E_e+\sum_{i=1}^{m}E_i\exp(-t/\tau_i)\\ \varepsilon_y(t)=\varepsilon_{ye}+\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{yj}\exp(-t/\tau_j)\end{cases} \qquad (14)$$

代入式(13)有

$$\nu_c(t)=-\frac{1}{\sigma_0}\Big[\varepsilon_{yo}E_e+\varepsilon_{yo}\sum_{i=1}^{m}E_i\exp(-t/\tau_i)+E_e\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{yj}$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{yj}E_i\exp(-t/\tau_i)+E_e\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_{yj}(1-\exp(-t/\tau_j))$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{E_i\varepsilon_{yj}\tau_i}{\tau_i+\tau_j}(1-\exp(-(\tau_i+\tau_j)t/(\tau_i\tau_j)))\tag{15}$$

式(15)是对文献[9]情况的推广。

另一个办法是从广义虎克定律：$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2G}\sigma_{ij}-\frac{\upsilon}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk}=\frac{J}{2}\sigma_{ij}-\upsilon D\delta_{ij}\sigma_{kk}$出发，用应力单轴拉伸时，$\sigma_x=\sigma_0$，$\varepsilon_x=\sigma_0 D$；用应变单轴拉伸时，$\varepsilon_x=\varepsilon_0$，$\sigma_x=\varepsilon_0 E$。代入上式求出

$$\nu_c=J/2D-1,\quad \nu_r=E/2G-1\tag{16}$$

根据弹性/粘弹性对应原理，以 $s\bar{\nu}$、$s\bar{E}$、$s\bar{G}$ 分别替代(16)式中的对应量，如求出

$$\bar{\nu}_r=\frac{1}{2}\bar{E}\,\bar{J}S-1/S$$

对上式两边求逆，得到

$$\nu_r(t)=\frac{1}{2}E(0)J(t)-1+\frac{1}{2}\int_0^t J(\tau)\frac{dE(t-\tau)}{d\tau}d\tau\tag{17}$$

同理，由(16)第二式求出：

$$\nu_c(t)=\frac{1}{2}J(0)E(t)-1+\frac{1}{2}\int_0^t E(\tau)\frac{dJ(t-\tau)}{d\tau}d\tau\tag{18}$$

式(17)、(18)给出从拉伸松弛模量 $E(t)$、剪切松弛模量 $J(t)$ 求出粘弹泊松比的途径。文献[10]近似给出了 $\nu_r(t)$、$\nu_c(t)$ 的试验曲线，其变化趋势与上节结论一致。

3 复泊松比与推迟谱

非老化粘弹材料和线性粘弹材料受频率为 ω 的激励作用，其稳态响应具有相同的频率，不同试验条件下的复粘弹特性如表 3 所示。

表 3 复模量和复柔量

试验条件	复模量	复柔量
拉压变形	$E^*(i\omega)=E'+iE''$	$D^*(i\omega)=D'-iD''$
剪切变形	$G^*(i\omega)=G'+iG'$	$J^*(i\omega)=J'-iJ''$
静压试验	$K^*(i\omega)=K'+K'$	$B^*(i\omega)=B'-iB''$

表中加“′”表示存贮分量，加“″”表示损耗分量，可类似地引入复泊松比 $\upsilon^*(i\omega)$，它代表动力条件下横向应变 $\varepsilon_y(\omega)$ 对纵向应变 $\varepsilon_x(\omega)$ 的响应，因此具有柔量的属性：

$$\nu^*(i\omega)=\nu'(\omega)-i\nu''(\omega)\tag{19}$$

有些文献写出式(19)时采用加号是不正确的，因为与 $\nu^*(i\omega)$ 相关的量是动应变而不是动应力。

把 E^*，G^* 代入

$$\nu^*=E^*/2G^*-1=\nu'-i\nu''$$

可求出
$$\begin{cases}\nu' = (E'G'' + E''G')/2(G'^2 + G''^2) - 1 \\ \nu'' = (E'G - E''G')/2(G'^2 + G''^2)\end{cases} \tag{20}$$

上式给出以 E^*，G^* 求 ν'，ν''的方程，由于动力升温，测定 ν''十分困难[11]。

松弛模量、蠕变柔量对应各自的谱函数，谱函数抽象而本质地刻划了粘弹材料的力学性质，联系了动力与静力性质，是各种近似表达法的基础，我们也可以为粘弹泊松比建立对应的谱。在松弛实验中 $\varepsilon_x(t)=\varepsilon_0 H(t)$，略去瞬态响应，由式(11)求出：

$$-\varepsilon_y(t) = \int_0^t \nu(t-\tau)\frac{d\varepsilon_x(\tau)}{d\tau}d\tau$$

对上式两边作 Laplace 变换有

$$-\bar{\varepsilon}_y = s\bar{\nu}\,\bar{\varepsilon}_x = \bar{\nu}\varepsilon_0 \tag{21}$$

现在把 $\bar{\nu}$ 展开为 S 域内的 Prony 级数形式：

$$\bar{\nu} = \nu_g + \sum_i \upsilon_i/(1+\tau_i s), = \nu_e - \sum_i \nu_i\tau_i s/(1-\tau_i s) \tag{22}$$

ν_g、ν_e 为 $\nu(t)$的初始值与平衡值，τ_i 为 $\nu(t)$的特征松弛时间。引入与 $\nu(t)$相对应的推迟谱函数 $M(\tau)$，并使离散分布的推迟时间 τ_i 变为连续分布的推迟时间，并采有对数时间 $\ln\tau$ 作为自变量，由式(22)可导出：

$$\bar{\nu} = \nu_g + \int_{-\infty}^{\infty}(M(\tau)/(1+\tau s))d(\ln\tau) \tag{23}$$

式中，$\int_{-\infty}^{\infty}M(\tau)d(\ln\tau) = \nu_e - \nu_g$；式(23)两边除以 s 后求逆，得到时域内的关系：

$$\begin{cases}\nu(t) = \upsilon_g + \int_{-\infty}^{\infty}M(\tau)(1-\exp(-t/\tau))d(\ln\tau) \\ \nu(t) = \nu_e - \int_{-\infty}^{\infty}M(\tau)\exp(-t/\tau)d(\ln\tau)\end{cases} \tag{24}$$

在式(22)中令 $s=i\omega$ 后与式(19)比较，解出 ν'，ν''同 $M(\tau)$的关系为：

$$\begin{cases}\nu'(\omega) = \nu_g + \int_{-\infty}^{\infty}M(\tau)/(1+\tau^2\omega^2)d(\ln\tau) \\ \nu''(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}M(\tau)\omega\tau/(1+\tau^2\omega^2)d(\ln\tau)\end{cases} \tag{25}$$

由式(24)、式(25)可以看出：$\nu(t)$，$\nu'(\omega)$，$\nu''(\omega)$都是谱函数 $M(\tau)$的各种加权积分，由此可推出各种粘弹泊松比的近似公式。由于直接测试 ν_g、ν_e 并非易事，特别是测定 0.1 秒以下 $\nu(t)$值困难更大，所以通过动力试验和频率——温度转化关系近似求粘弹泊松比，很有实际意义。

4 经验拟合法

在试验设备条件允许的有限时间范围内，用经验方程直接拟合试验数据，其应用范围局限，但直接反映定义 (1) 的测试结果，可解决工程设计急需。我们对两种配方的固体推进剂（固体填充量 84%，实验温度 28±1℃，相对湿度 73%，测试时间范围 10—10^6 秒），给出 10^6 秒以内粘弹泊松比的经验公式为

$$\nu(t) = 0.29196t^{0.00920715};\quad \nu(t) = 0.41951t^{0.0028152}$$

$\nu(t)$曲线随时间上升，老化后 $\nu(t)$显著降低[4]、[13]。.

5 结　　论

以上表述方法和试验结果证明：粘弹泊松比函数是同作用历史相关的、随时间变化的，其初值和终值具有弹性泊松比的特征。目前粘弹性应力分析中采用不可压缩假定（$\nu=1/2$）或恒定的泊松比假定，虽然简化了数学处理，但不能反应固体推进剂的真实情况，其定量分析结果也因而值得质疑。微分表示法概念直观、易于演算，能描述初值与终值，但局限于小变形、线粘弹、试验拟合较繁；积分表示法可直接引用实验数据，可推广到有限变形与物理非线性情况，但不适于应用弹性/粘弹性对应原理；复数表示法有利于试验数据处理和推导近似公式，但也只能限于线性粘弹的稳态问题。本文还给出了粘弹推迟谱和注意到粘弹材料出现负泊松比的可能性。需要进一步研究的问题是：时间一温度迭加原理适合粘弹泊松比；有限变形和物理非线性 条件下，如何描述收缩比及发展高精度（三位有效数字）、自动化（测定 1 秒以内，10^5 秒以上）粘弹泊松比测试技术。

参 考 文 献

1 朱祖念．固体火箭发动机完整性分析的几个问题。长沙：国防科技大学，1982；59

2 王元有．兵工学报．1983；(3)：18

3 Thomson K C. J. Appl. Polym Sci, 1966:(10). 1133

4 彭先洪，郝松林，实验力学. 1992:(2):202

5 克里斯坦森. 郝松林，老亮译，粘弹性力学引论，北京：科学出版社，1990:48

6 Fung Y C. Foundations of solid mechanics. Prentice—Hall Inc. 1965:356

7 郝松林. 流变学近展. 成都科技大学出版社，1987:104

8 Lakes R, Friis E. A, Park J B. J. of Mat. Sci. 1988:(23), 4406

9 Regan F C. AD830039(1967)

10 Theocaris P S. J. Mech. Phys. Solids. 1964, 12; 125

11 Sim S, Kim K. J. J. of Sound and Vib. 1990; 141:71

The Formulations of Viscoelastic Poisson's Ratio

Hao Songlin

(Department of Aerospace Technology)

Abstract

This paper rewiews four formulations of viscoelastic Poisson's ratio, which are the formulation by differential operators, the formulation by hereditary integral and by complex and empirical methods. Also discused are the domain ralidty and problems of these methods, which provide convenient description of mechanical behaviors of solid rocket propellants.

Key words elasticity, viscoelasticity, Poisson's ratio