国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第14卷第4期 1992年12月 Vol. 14 No. 4

Banach 空间中集值测度的表示定理*

覃左平
（系统工程与应用数学系）

摘 要 本文提出了用向量测度及概率测度生成集值测度的方法，推广了文[1]的结果，并给出了有界闭凸集值测度由一族等比向量测度生成的充要条件。

关键词 集值测度，表示定理，等比向量测度
分类号 O153.1

1 基本概念及引理

设 X 为 Banach 空间，$A_n \subset X$ 为 X 的一列子集，定义 A_n 的和集 $A=\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 如下

$$A=\{x: x=\sum_{n=1}^{\infty} x_n, x_n \in A_n \text{且} \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{收敛}\}$$

显然，一列非空集的和有可能是空集。

定义 1.1 设$(\Omega,\mathscr{B})$为可测空间，X 为 Banach 空间，$P_0(X)$表示 X 的非空子集全体，π: $\mathscr{B} \to P_0(X)$称为 $\mathscr{B}$ 到 $P_0(X)$的集值测度。如果 π 满足可列可加性，亦即若 $A=\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$，$A_k \cap A_{k'}=\varnothing (k \neq k')$，$A_k \in \mathscr{B}$，则有 $\pi(A)=\sum_{k=1}^{\infty} \pi(A_k)$。

以后，如不特别声明，我们总设集值测度即为 $\mathscr{B}$ 到 $P_0(X)$的集值测度，$(\Omega,\mathscr{B})$为可测空间，X 为 Banach 空间。

很明显，如果 π 为集值测度，则 $\pi(\varnothing)$或为$\{0\}$或为一无界集。本文讨论的集值测度均假设 $\pi(\varnothing)=\{0\}$。从定义可看出，向量测度即为单点集值测度。我们知道任一向量测度可定义其全变差测度，对于集值测度，也有类似定义。

设 $B \subset X$，定义 $\|B\|=\sup_{x \in B}\|x\|$，又 $A \in \mathscr{B}$ 为任一可测集，$\tilde{\pi}=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$称为 A 的一个分划，如果 $A=\bigcup_{k=1}^{n} A_k$，且 $A_k \in \mathscr{B}$，$\{A_k\}$两两不交。设 $\mathscr{F}(A)$为 A 的分划全体。现在，我们引入所谓全变差定义。

---

* 1991年10月7日收稿

定义 1.2 设 π 为集值测度，对 $\forall A\in\mathscr{B}$，令 $|\pi|(A)=\sup\limits_{\tilde{\pi}\in\mathscr{P}(A)}\sum\limits_{A_i\in\tilde{\pi}}\|\pi(A_i)\|$，称 $|\pi|$ 为 π 的全变差测度，$|\pi|(\Omega)$ 为 π 的全变差。如果 $|\pi|(\Omega)<\infty$，则称 π 为有界变差的集值测度。

从定义不难证明，若 π 为集值测度，则 $|\pi|$ 为 $(\Omega,\mathscr{B})$ 上的可列可加测度。

设 X 为 Banach 空间，π：$\mathscr{B}\to P_0(X)$ 为集值测度，如果对 $\forall A\in\mathscr{B}$，$\pi(A)$ 为 X 中的有界集，则称 π 为有界集值测度；若 $\pi(A)$ 为 X 中的闭、凸、紧集等，则分别称 π 为闭、凸、紧等集值测度。

设 R^n 为 n 维欧氏空间，则我们有如下引理。

引理 1.2 设 π 为 $(\Omega,\mathscr{B})$ 到 $P_0(R^n)$ 的有界集值测度。若 $A\in\mathscr{B}$，$A=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$，$A_k\in\mathscr{B}$，$A_k\cap A_{k'}=\varnothing$，必有 $\pi(A)=\{x:x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k,x_k\in\pi(A_k)\}=\{x:\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k,x_k\in\pi(A_k)$，且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|x_k\|<\infty\}$。

证明 只须证明，对 $\forall x_k\in\pi(A_k)$，有 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|x_k\|<\infty$ 即可；若不然，设有 $x_k\in\pi(A_k)$，使 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|x_k\|=\infty$.

令 $x_k=(x_1^k,x_2^k,\cdots,x_n^k)$，则必有 i_0 使 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_{i0}^k|=+\infty\quad 1\leqslant i_0\leqslant n$，于是，可找子列 k_j，$k_1<k_2<\cdots$ 使 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}x_{i0}^{k_j}=\infty$，且不妨设 $x_{i0}^{k_j}>0$. 现在令 $B=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}A_{k_j}$，则 $B\in\mathscr{B}$.

$\pi(B)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\pi(A_{k_j})$ 为有界集。设 $x_0=\sum\limits_{j=1}^{\infty}y_{k_j}\in\pi(B)$，这里 $y_{k_j}\in\pi(A_{k_j})$。于是，可找 N_0，使 $n\geqslant N_0$ 时 $\|\sum\limits_{j=n}^{\infty}y_{k_j}\|<1$. 现取 $Z_n=\sum\limits_{j=1}^{n}x_{k_j}+\sum\limits_{j=n+1}^{\infty}y_{k_j}\in\pi(B)$，但 $n\geqslant N_0$ 时，$\|Z_n\|\geqslant\sum\limits_{j=1}^{n}|x_{i0}^{k_j}|-1\to\infty$，这与 $\pi(B)$ 的有界性矛盾。

由引理 1.1 知，对于有限维空间 R^n 而言，为研究有界集值测度，可直接定义一列集 A_n 的和集[3]

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}A_n=\{x=\sum_{n=1}^{\infty}x_n:\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|<\infty,x_n\in A_n\}$$

引理 1.2 有限维 Banach 空间中的有界集值测度是有界变差的。

证明 因为任一有限维 Banach 空间与 R^n 等价，故我们只须证明 R^n 上的任一有界集值测度必为有界变差的即可，设 π 为 R^n 上的有界集值测度，由引理 1.1 及文[2]中定理 2.2.7，存在有限测度 V，使对 $\forall A\in\mathscr{B}$，$\|\pi(A)\|\leqslant V(A)\leqslant V(\Omega)$，于是，对 A 的任一分划 $A=\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$

$$\|\pi(A_k)\|\leqslant V(A_k)\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\|\pi(A_k)\|\leqslant\sum_{k=1}^{n}V(A_k)=V(A)\leqslant V(\Omega)$$

于是 $|\pi|(\Omega)\leqslant V(\Omega)<\infty$。

但对于无穷维空间，引理 1.2 是不成立的。

例 1.3 设 $\Omega=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$，$\mathscr{B}=P(\Omega)$ 为 Ω 的子集全体，$X=l^\infty$，对$\forall$ $A=\{n_1,n_2,\cdots,n_k\}$，k 为有限或∞. 定义 $\pi(A)=\sum\limits_{n_i\in A}\frac{1}{n_i}e_{n_i}$

这里 $e_n=(\overbrace{0,\ 0,\ \cdots,\ 0}^{(n-1)\text{个}},1,0,\cdots)$。显然 $\pi(A)$ 是有界向量测度，从而是有界集值测度，但 π 不是有界变差的，这是因为当 $n\to+\infty$ 时

$$|\pi|(A_n)=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\to\infty, A_n=\{1,2,\cdots,n\}$$

引理 1.4 设 $A_n\subset X$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|A_n\|<\infty$，$A=\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，则

（1）如果每个 A_n 是紧（弱紧）的，则 A 亦然；

（2）如果每个 A_n 是紧凸（弱紧凸）的，则 A 亦然。

证明 （1）设 A_n 是范数紧的，往证 A 是范数紧的，任取点列 $\{x_n\}\subset A$，不妨设 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_{nk}$.

这里 $\{x_{nk},n=1,2,\cdots\}\subset A_k$，由于每个 A_k 是紧的，由对角线法，可找 x_n 的子列 x_{n_k} 使对每个 j，$\operatorname{Lim}\limits_{j\to\infty}x_{n_k,j}=z_j\in A_j$，今令

$z=\sum\limits_{j=1}^{\infty}z_j\in A$，往证 $x_{n_k}\to z$，对$\forall$ $\varepsilon>0$，$\exists$ N 使 $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty}\|A_k\|<\varepsilon/2$，于是有

$$\|x_{n_k}-z\|\leqslant\sum_{j=1}^{N}\|x_{n_kj}-z_j\|+\varepsilon$$

在上式中，令 $k\to\infty$，则有

$$\overline{\operatorname{Lim}_{k\to\infty}}\|x_{n_k}-z\|\leqslant\varepsilon \text{ 对 } \forall\ \varepsilon>0 \text{ 成立。}$$

故 $\overline{\operatorname{Lim}}_{k\to\infty}\|x_{n_k}-z\|=0$. 对于弱紧性，由文献[6]中 Smulian 定理知，赋范线性空间中有界集 E 是弱紧的当且仅当 E 是弱列紧的，故只须证明 A 是弱列紧的，于是由上述类似方法可证明弱紧性的情形。

（2）由(1)及凸集的定义，命题显然成立。

.2 表示定理

在文[1]中，作者提出了用一列等比向量测度生成集值测度的方法，本节将给出用向量测度和概率测度生成集值测度的方法，并指出了文献[1]中所提出的等比向量测度生成的紧凸集值测度，实际上是本文的特殊情形。

定理 2.1 设 P 为有界变差向量测度，μ_n 为一列概率测度，$B_n\subset X$ 为 X 的一列有界闭凸集且满足 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|B_n\|<\infty$，对$\forall$ $A\in\mathscr{B}$，定义

$\pi(A)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_n(A)B_n+P(A)$，则 π 为有界变差的凸集值测度，且有：(1) 如果 B_n 均为弱紧的，则 π 是弱紧的；(2) 如果 B_n 均为紧的，则 π 为紧的。

证明 由引理 1.4，只须证 π 是可列可加的即可。设 $A=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$，$A_k\cap A_{k'}=\varnothing$，$\{A_k\}\subset\mathscr{B}$，往证 $\pi(A)=\sum_{k=1}^{\infty}\pi(A_k)$。

设 $x\in\pi(A)$，则有 $x_n\in B_n$ 使

$$x=P(A)+\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(A)x_n=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)+\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(A)x_n$$

注意到 $$\sum_{n,k=1}^{\infty}\|\mu_n(A_k)x_n\|\leqslant\sum_{n,k=1}^{\infty}\mu_n(A_k)\|B_n\|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\|B_n\|<\infty$$

故有 $$\begin{aligned}x&=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\mu_n(A_k)x_n=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(A_k)x_n\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(P(A_k)+\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(A_k)x_n\Big)\in\sum_{k=1}^{\infty}\pi(A_k)\end{aligned}$$

故 $\pi(A)\subset\sum_{k=1}^{\infty}\pi(A_k)$。反之若 $x\in\sum_{k=1}^{\infty}\pi(A_k)$，则有 $\{x_{n_k}\}\subset B_n$（n，$k=1$，2，…），使

$$\begin{aligned}x&=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(P(A_k)+\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(A_k)\cdot x_{nk}\Big)=P(A)+\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(A)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_n(A_k)}{\mu_n(A)}x_{nk}\\&=P(A)+\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(A)y_n\qquad(\text{不妨设 }\mu_n(A)\neq 0)\end{aligned}$$

这里 $y_n=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_n\ (A)}{\mu_n\ (A)}\cdot x_{nk}$. 往证 $y_n\in B_n$. 注意到 B_n 为闭的，又对$\forall\ N$，设

$$V_N=\sum_{k=1}^{N}\frac{\mu_n(A_k)}{\mu_n(A)}$$

则 $0\leqslant V_N\leqslant 1$ 且 $V_N\uparrow 1$.

令 $$z_N=\frac{1}{V_N}\sum_{k=1}^{N}\frac{\mu_n(A_k)}{\mu_n(A)}x_{nk}$$

则 $z_N\in B_n$，于是 $y_n=\operatorname*{Lim}_{N\to\infty}z_N\in B_n$.

设 P，Q 为两个向量测度，称 P，Q 是等比的，如果对$\forall\ A$，$B\in\mathscr{B}$，$A\cap B=\varnothing$，则或有 $P(A)=Q(A)$，或有 $P(B)=Q(B)$，或$\exists\ C>0$ 使 $P(A)-Q(A)=C\cdot(P(B)-Q(B))$。

定理 2.2 若$\{P_\alpha,\alpha\in\mathscr{A}\}$是一族两两等比的有界变差向量测度，且$\sup_\alpha|P_\alpha|(\Omega)<\infty$，则 $\pi(A)=\overline{CO}\{P_\alpha(A):\alpha\in\mathscr{A}\}$为有界变差闭凸集值测度，且有有界变差向量测度 P 及有界闭凸集 B，使 $\pi(A)=P(A)+\mu(A)B$，其中 μ 为一概率测度。

为证此定理，先证几个引理。

引理 2.3 若 P，Q 为等比向量测度，且 $P\neq Q$，则 $P(\Omega)\neq Q(\Omega)$，且可找概率测度 μ 使对$\forall\ A\in\mathscr{B}$ 有

$$P(A)=Q(A)+\mu(A)(P(\Omega)-Q(\Omega))$$

证明 设 $A\in\mathscr{B}$，若 $P(A)=Q(A)$，则取 $\mu(A)=0$. 若 $P(A^C)=Q(A^C)\Rightarrow P(A)-Q(A)=P(\Omega)-Q(\Omega)$，则取 $\mu(A)=1$. 若 $P(A)\neq Q(A)$，$P(A^C)\neq Q(A^C)$，由条件则存在

$C>0$ 使 $P(A)-Q(A)=C\cdot(P(A^C)-Q(A^C))$。此时，取 $\mu(A)=\dfrac{C}{1+C}$，则有

$$P(A)-Q(A)=\mu(A)(P(\Omega)-Q(\Omega))$$

总之，$P(A)=Q(A)+\mu(A)(P(\Omega)-Q(\Omega))$ 对于$\forall\ A\in\mathscr{B}$成立。又显然 $P(\Omega)\neq Q(\Omega)$，由上式可推知 μ 为概率测度。

引理 2.4 设$\{P_i,i\in I\}$为一族两两等比的向量测度，且$\{P_i\}$两两不同。若令 $P_i(A)=P_{i0}(A)+\mu_i(A)\gamma_i$，则或者 $\mu_i\equiv\mu(i\in I)$；或者有 $\gamma_i=\alpha_i\gamma(\gamma\neq 0)$，$\alpha_i$ 为实数，且 $\alpha_i\geqslant\alpha_j$ 时 $\upsilon_i\geqslant\upsilon_j$. 这里 $\gamma_i=P_i(\Omega)-P_{i0}(\Omega)$，$\upsilon_i=\alpha_i\mu_i$.

证明 取 $i_1\in I$ 使 $i_1\neq i_0$. 若$\exists\ i_2\in I$ 使 γ_{i2}与 γ_{i1}线性无关，则对$\forall\ i\in I$，若 γ_i 与 γ_{i1}线性无关，则有 $\mu_i=\mu_{i1}$. 事实上，对$\forall\ A\in\mathscr{B}$，因为

$$P_i(A)-P_{i0}(A)=\mu_i(A)\gamma_i;\quad P_{i1}(A)-P_{i0}(A)=\mu_{i1}(A)\gamma_{i1}$$

所以 $$P_i(A)-P_{i1}(A)=\mu_i(A)\gamma_i-\mu_{i1}(A)\gamma_{i1}$$

注意到 P_i 与 P_{i1}等比，由引理 2.3，有概率测度 υ，使 $P_i(A)-P_{i1}(A)=\upsilon(A)(\gamma_i-\gamma_{i1})$，于是有$(\mu_i(A)-\upsilon(A))\gamma_i=(\mu_{i1}(A)-\upsilon(A))\gamma_{i1}\Rightarrow\mu_i=\mu_{i1}=\upsilon$.

若 γ_i 与 γ_{i1}线性相关，则 γ_i 与 γ_{i2}线性无关，由上证 $\mu_i=\mu_{i2}=\mu_{i1}$，故总有 $\mu_i=\mu_{i1}$，对$\forall\ i\in I$.（注意 $i=i_0$ 时 $\gamma_{i0}=0$，故不妨设 $\mu_{i0}=\mu_{i1}$）

如果所有 γ_i 均与 γ_{i1}线性相关，记 $\gamma_i=\alpha_i\gamma_{i1}$，由引理 2.3 知 $\upsilon_i-\upsilon_j=\alpha_i\mu_i-\alpha_j\mu_j=(\alpha_i-\alpha_j)\upsilon_{ij}$，$\upsilon_{ij}$为概率测度，故 $\alpha_i\geqslant\alpha_j$ 时 $\upsilon_i\geqslant\upsilon_j$.

现在证明定理 2.2，由定理 2.1 知，只须证下半部分，由引理 2.4，设有 $P_\alpha(A)=P_{\alpha0}(A)+\mu_\alpha(A)(P_\alpha(\Omega)-P_{\alpha0}(\Omega))=P_{\alpha_0}(A)+\mu_\alpha(A)\gamma_\alpha$. 若 $\alpha_1\neq\alpha_2$，使 $\gamma_{\alpha1}$与 $\gamma_{\alpha2}$线性无关，则有 $\mu_\alpha=\mu_{\alpha1}=\mu$，对 $\forall\ \alpha\in\mathscr{A}$. 于是

$P_\alpha(A)=P_{\alpha0}(A)+\mu(A)\gamma_\alpha$。又设 $B=\pi(\Omega)-P_{\alpha0}(\Omega)$，则 B 为一有界闭凸集，且 $\pi(A)=P_{\alpha0}(A)+\mu(A)B$，对$\forall\ A\in\mathscr{B}$ 成立。事实上，设 $x\in\mathrm{CO}\{P_\alpha(A),\alpha\in\mathscr{A}\}$，则有 $x=\sum_{i=1}^n\lambda_iP_{\alpha i}(A)$，$\alpha_i\in\mathscr{A}$，$\sum_{i=1}^n\lambda_i=1$，$\lambda_i\geqslant 0$，于是

$$x=\sum_{i=1}^n\lambda_ixP_{\alpha i}(A)=\sum_{i=1}^n\lambda_i(P_{\alpha0}(A)+\mu(A)\gamma_{\alpha i})$$

$$=P_{\alpha0}(A)+\mu(A)\Big(\sum_{i=1}^n\lambda_iP_{\alpha i}(\Omega)-P_{\alpha0}(\Omega)\Big)$$

从而 $$x\in P_{\alpha0}(A)+\mu(A)B$$

故 $$\pi(A)=\overline{\mathrm{CO}}\{P_\alpha,\alpha\in\mathscr{A}\}\subset P_{\alpha0}(A)+\mu(A)B$$

反之，由于 $$B=\overline{\mathrm{CO}}\{P_\alpha(\Omega);\alpha\in\mathscr{A}\}-P_{\alpha0}(\Omega)$$，而

$$x\in P_{\alpha0}(A)+\mu(A)[\mathrm{CO}(P_\alpha(\Omega);\alpha\in\mathscr{A}\}-P_{\alpha0}(\Omega)\}]$$ 时，有

$$x=P_{\alpha0}(A)+\mu(A)\Big(\sum_{k=1}^n\lambda_kP_{\alpha k}(\Omega)-P_{\alpha0}(\Omega)\Big)$$

$$=\sum_{k=1}^n\lambda_k[P_{\alpha0}(A)+\mu(A)(P_{\alpha k}(\Omega)-P_{\alpha0}(\Omega))]\in\pi(A)$$

这里 $\sum_{k=1}^n$，$\lambda_k=1$，$\lambda_k\geqslant 0$.

故 $P_{\alpha 0}(A)+\mu(A)B\subset\pi(A)$，于是证明了 $\pi(A)=P_{\alpha 0}(A)+\mu(A)B$，且 $P_{\alpha 0}$为有界变差的. 从而 π 为有界变差的。若所有 γ_α 线性相关，设 $\gamma_\alpha=a_\alpha\gamma_{\alpha 1}$，$\alpha\in\mathscr{A}$，由于$\{P_\alpha:\alpha\in\mathscr{A}\}$一致有界，知$\{a_\alpha,\alpha\in\mathscr{A}\}$有界。记

$$a=\sup_{\alpha\in\mathscr{A}}\{a_\alpha\}\qquad b=\inf_{\alpha\in\mathscr{A}}\{a_\alpha\}\qquad \text{对}\ \forall\ A\in\mathscr{B}$$

$$\mu_1(A)=\sup_{\alpha\in\mathscr{A}}a_\alpha\mu_\alpha(A)\qquad \mu_2(A)=\inf_{\alpha\in\mathscr{A}}a_\alpha\mu_\alpha(A)$$

我们有 μ_1，μ_2 均为有界测度，且 μ_1 非负，μ_2 非正。

事实上，取 a_{α_k}使 $a_{\alpha_k}\uparrow a$，由引理 2.4 知，

$$\upsilon_{\alpha_k}(A)=a_{\alpha_k}\mu_{\alpha_k}(A)\uparrow\ \text{且}\quad \operatorname{Lim}_{k\to\infty}\upsilon_{\alpha_k}(A)=\mu_1(A)$$

由 Vitali-Hahn-Saks[5]定理，μ_1 为有界非负测度，同理可证 μ_2 为有界非正测度。现令

$$B=\{t\gamma_{\alpha 1}\quad 0\leqslant t\leqslant\mu_1(\Omega)-\mu_2(\Omega)\}$$

则 B 为有界闭凸集，记 $\mu=(\mu_1-\mu_2)/a$.

$a_0=\mu_1(\Omega)-\mu_2(\Omega)$，则 μ 为概率测度，我们有 $\pi(A)=P(A)+\mu(A)B$，事实上，若 $x\in\mathrm{CO}\{P_\alpha(A):\alpha\in\mathscr{A}\}$,则$\exists\ \lambda_i\geqslant 0$，$\sum_{i=1}^n\lambda_i=1$ 使

$$\begin{aligned}x&=\sum_{i=1}^n\lambda_iP_{\alpha i}(A)=P_{\alpha 0}(A)+\sum_{i=1}^n\lambda_ia_{\alpha i}\\&=P_{\alpha 0}(A)+\mu_2(A)\gamma_{\alpha 1}+\sum_{i=1}^n\lambda_i(\upsilon_{\alpha i}-\mu_2)(A)\gamma_{\alpha 1}\\&=P(A)+\sum_{i=1}^n\lambda_it_i\gamma_{\alpha 1}\end{aligned}$$

这里 $P(A)=P_{\alpha 0}(A)+\mu_2(A)\gamma_{\alpha 1}$为有界变差向量测度。 $0\leqslant t_i=\upsilon_{\alpha i}(A)-\mu_2(A)\leqslant\mu_1(A)-\mu_2(A)$。而

$$0\leqslant\sum_{i=1}^n\lambda_it_i\leqslant\mu_1(A)-\mu_2(A)=a_0\mu(A)$$

于是有
$$x=P(A)+\mu(A)t'\gamma_{\alpha 1}$$

$$0\leqslant t'=\frac{\sum_{i=1}^n\lambda_it_i}{\mu(A)}\leqslant a_0$$

从而
$$\pi(A)\subset P(A)+\mu(A)B$$

反之,若 $x\in P(A)+\mu(A)B$, 则可找 $a\leqslant t\leqslant a_0$ 使

$$\begin{aligned}x&=P_{\alpha 0}(A)+\mu_2(A)\gamma_{\alpha 1}+\mu(A)t\gamma_{\alpha 1}\\&=P_{\alpha 0}(A)+\mu_2(A)\gamma_{\alpha 1}+(\mu_1(A)-\mu_2(A))\frac{t}{a_0}\gamma_{\alpha 1}\\&=P_{\alpha 0}(A)+\frac{t}{a_0}\mu_1(A)\gamma_{\alpha 1}+\left(1-\frac{t}{a_0}\right)\mu_2(A)\gamma_{\alpha 1}\end{aligned}$$

故,只须证 $P_{\alpha 0}(A)+\mu_i(A)\gamma_{\alpha 1}\in\pi(A)\quad(i=1,2)$即可。由定义 $\mu_1(A)=\sup_\alpha a_\alpha\mu_\alpha(A)$,但 $P_{\alpha 0}(A)+a_\alpha\mu_\alpha(A)\gamma_{\alpha 1}\in\pi(A)$，且 $\pi(A)$为闭的，故 $P_{\alpha 0}(A)+\mu_1(A)\gamma_{\alpha 1}\in\pi(A)$。同理

$$P_{\alpha 0}(A)+\mu_2(A)\gamma_{\alpha 1}\in\pi(A)$$

在有限维空间中，有界闭凸集值测度必为紧凸集值测度，故定理2.2的结论包含了文[1]中结果。

定理 2.5 若π为闭凸集值测度，且$\pi(A)=P(A)+\mu(A)B$，这里P为向量测度，μ为概率测度，B为有界闭凸集，则π一定为一族两两等比的向量测度生成。特别的，若$\pi(\Omega)$范数可分，则可找可列个两两等比的向量测度$\{P_n\}$使$\pi(A)=\overline{\mathrm{CO}}\{P_n(A);n\geqslant 1\}$。

证明 对$\forall\ x\in B$，记$P_x(A)=P(A)+\mu(A)x$，则P_x为向量测度，且$P_x(A)\in\pi(A)$，又若$x\neq y$，因$P_x(A)-P_y(A)=\mu(A)(x-y)$。故若$A\cap B=\varnothing$且$P_x(A)\neq P_y(A)$，$P_x(B)\neq P_y(B)$，则$\mu(A)\neq 0$，$\mu(B)\neq 0$，且$P_x(A)-P_y(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(B)}(P_x(B)-P_y(B))$。从而$P_x$与$P_y$等比，且$\pi(A)=\overline{\mathrm{CO}}\{P_x(A),x\in B\}$。

若$\pi(\Omega)$范数可分，则B范数可分，设$\{x_n\}$为其稠密子集，则$P_{x_n}(A)$在$\pi(A)$中稠，故

$$\pi(A)=\overline{\mathrm{CO}}\{P_{x_n}(A)\}$$

参 考 文 献

1 张文修，李腾．集值测度的表示定理．数学学报，1988，(2)：201～208

2 张文修．集值测度与随机集．西安交通大学出版社．1989

3 Artsteinz Set-Valued Measures Tran of the Ameri Math Society. 1975, 165: 103～125

4 J. L. 凯莱著，吴从炘，吴让泉译．一般拓扑学．科学出版社，1982

5 吉田耕作著；吴元恺等译．泛函分析．人民教育出版社，1980

6 Richard B Holmes. Geometric Functional Analysis and its Applications. Springer-Verlag New York, Heidelberg Berlin, 1975

The Expression Theorem of Set-value Measures in Banach Spaces

Qing Zuoping

(Department of Applied Mathematics and Systems Engineering)

Abstract

In this paper we put forward a method of generating set-valued measures by using vector measures and probahility measures and then develop the resules in [1], and obtain the necessary and sufficent conditions of the closed convex set-valued measures generated by equal ratio rector measures.

Key words set-valued measure, expression theorem, equal ratio vector measures