国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第14卷第4期 1992年12月 Vol. 14 No. 4

算子值解析函数的 Julia－Wolff 引理*

朱健民
（系统工程与应用数学系）

摘 要 本文将单位圆上有界复值解析函数的 Julia－wolff 引理推广到算子值解析函数。

关键词 Hilbert 空间，算子，解析函数，角导数
分类号 O177. 3

设 $\Delta=\{|z|<1\}$，$\Gamma_\alpha=\{z:\frac{|1-z|}{1-|z|}<\alpha\}$ $(\alpha>0)$ 称为stolz 角。在复分析中有如下Julia－Wolff 引理[1]：

设 $f(z)$在 Δ 上解析，$|f(z)|<1(z\in\Delta)$，令

$$a=\inf_{z\in\Delta}\frac{1-|f(z)|^2}{|1-f(z)|^2}\Big/\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}\qquad(0<a(+\infty)$$

则对任何stolz 角 Γ_α，有

$$\lim_{\Gamma_\alpha\ni z\to1}\frac{1-f(z)}{1-z}=\lim_{\Gamma_\alpha\ni z\to1}f'(z)=a^{-1}$$

称 a^{-1}为 $f(z)$在 $z=1$ 处的角导数。

本文目的在于将上述引理推广到算子值解析函数。设 H 为复的 Hilbert 空间，$L(H)$表示 H 上所有线性有界算子组成的Banach 代数。对 $L(H)$中的算子 A，其实部和虚部分别记为：$R_eA=\frac{1}{2}(A+A^*)$和 $I_mA=\frac{1}{2i}(A-A^*)$。设 A 和 B 为 $L(H)$中的自伴算子，$A\geqslant B$ 意为 $A-B$ 为正算子，即$\langle(A-B)x,x\rangle\geqslant0$，对一切 $x\in H$ 成立，而 $A>B$ 表示 $A-B$ 为正的可逆算子，对复平面上的区域 D，$A_H(D)$表示定义在 D 上而取值于 $L(H)$中的算子值解析函数。

1 几个引理

引理 1 设 $f(z)\in A_H(\Delta)$，$R_ef(z)>0(z\in\Delta)$，且 $f(0)=I$，(I 为 $L(H)$中的恒等算子)，则

$$\|f(z)\|\leqslant(1+|z|)(1-|z|)^{-1}$$

* 1991年5月20日收稿

证明 令 $\varphi(z)=(f(z)-I)(f(z)+I)^{-1}$，则 $\varphi(0)=0$，且 $\|\varphi(z)\|<1(z\in\Delta)$。由 Schwarz 引理[2,p. 100]有 $\|\varphi(z)\|\leqslant|z|(z\in\Delta)$，因此

$$\|f(z)\| = \|(I+\varphi(z)(I-\varphi(z))^{-1}\| \leqslant 1+2\sum_{n=1}^{\infty}\|\varphi(z)\|^n$$

$$\leqslant 1+2\sum_{n=1}^{\infty}|z|^n=(1+|z|)(1-|z|)^{-1}$$

由引理 1 可得文[3]之引理 2 的另一证明：

推论 设 $\Pi=\{R_e z>0\}$，$F(z)\in A_H(\Pi)$，$R_eF(z)>0(z\in\Pi)$. 若存在 $z_0\in\Pi$ 使 $F(z_0)=I$，则

$$\|F(z)\|\leqslant\frac{(|z|+|z_0|)^2}{(R_e z)(R_e z_0)}\qquad(z\in\Pi)$$

证明 令

$$f(\zeta)=F\left(\frac{\bar{z}_0\zeta-z_0}{\zeta-1}\right)$$

则 $f\in A_H(\Delta)$，$R_ef(\zeta)>0(\zeta\in\Delta)$，且 $f(0)=I$. 由引理 1 有 $\|f(\zeta)\|\leqslant(1+|\zeta|)(1-|\zeta|)^{-1}(\zeta\in\Delta)$，命 $\zeta=(z-z_0)(z+\bar{z}_0)^{-1}(z\in\Pi)$，则有

$$\|F(z)\| = \left\|f\left(\frac{z-z_0}{z+\bar{z}_0}\right)\right\|\leqslant\left(1+\left|\frac{z-z_0}{z+\bar{z}_0}\right|\right)\left(1-\left|\frac{z-z_0}{z+\bar{z}_0}\right|\right)^{-1}$$

$$=\frac{(|z+\bar{z}_0|+|z-z_0|)^2}{4(R_ez)(R_ez_0)}\leqslant\frac{(|z|+|z_0|)^2}{(R_ez)(R_ez_0)}$$

引理 2 若 $F(z)\in A_H(\Delta)$，$\|F(z)\|<1(z\in\Delta)$且存在 $L(H)$中的自伴算子 $A>0$ 使

$$(I-F(z)^*)^{-1}(I-F(z)^*F(z))(I-F(z))^{-1}>\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}A\qquad(1)$$

$(z\in\Delta)$，则$(I-F(z))(1-z)^{-1}$在任何 stolz 角 Γ_α 中有界。特别，$\lim\limits_{\Gamma_\alpha\ni z\to1}\|F(z)-I\|=0$.

证明 由式(1)有

$$(I-F(z)^*)A(I-F(z))<\frac{|1-z|^2}{1-|z|^2}(I-F(z)^*F(z))\qquad(2)$$

因 $A^{-1}\leqslant\|A^{-1}\|I$ 且 $A>0$，所以 $A>\|A^{-1}\|^{-1}I$，于是由(2)式有

$$(I-F(z)^*)(I-F(z))<\frac{|1-z|^2}{|1-|z|^2}\|A^{-1}\|(I-F(z)^*F(z))$$

由此，对任何 $x\in H$: $\|x\|=1$，有

$$\|(I-F(z))x\|^2<\frac{|1-z|^2}{1-|z|^2}\|A^{-1}\|(1-\|F(z)x\|^2)$$

或者

$$\frac{\|(I-F(z))x\|}{|1-z|}<\|A^{-1}\|\frac{|1-z|}{1-|z|}\frac{1-\|F(z)x\|^2}{\|(I-F(z))x\|}$$

$$\leqslant\alpha\|A^{-1}\|(1+\|F(z)x\|)\leqslant2\alpha\|A^{-1}\|$$

由 x 的任意性有

$$\left\|\frac{I-F(z)}{1-z}\right\|<2\alpha\|A^{-1}\|$$

引理 3 设 Γ_α 为 stolz 角，则存在 $h>0$ 使对任何 $z\in\Gamma_\alpha$，圆 $C_h(z)$：$|w-z|=h|z-1|$

均落在某个固定的 stolz 角中。

证明 事实上，当 $h<\alpha^{-1}$时有引理结论成立。因 $C_h(z)$上的点可表成

$$w = z + |z-1|e^{i\theta}, \theta \in [0,2\pi]$$

于是由$|z-1|<\alpha(1-|z|)$及 $h<\alpha^{-1}$有

$$\frac{|w-1|}{1-|w|} = \frac{|z-1+h|z-1|e^{i\theta}|}{1-|z+h|z-1|e^{i\theta}} \leqslant \frac{|z-1|}{1-|z|}\cdot\frac{1+h}{1-h\alpha} < \frac{(1+h)\alpha}{1-h\alpha} = \alpha'$$

因此 $C_h(z)$上的点 w 均位于 $\Gamma_{\alpha'}$中。

2 定理及证明

下面的定理便是 Julia－Wolff 引理的推广：

定理 设 $F(z)\in A_H(\Delta)$，$\| F(z) \| <1(z\in\Delta)$. 若存在 $L(H)$中的自伴算子 $A>0$ 使

$$(I-F(z)^*)^{-1}(I-F(z)^*F(z))(I-F(z))^{-1} > \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}A \tag{3}$$

$(z\in\Delta)$，且$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ z_0\in\Delta$ 使

$$\| (I-F(z_0)^*)^{-1}(I-F(z_0)^*F(z_0))(I-F(z_0))^{-1}\frac{|1-z_0|^2}{1-|z_0|^2} - A \| < \varepsilon \tag{4}$$

则对任何 stolz 角 Γ_α，有

$$\lim_{\Gamma_\alpha\ni z\to 1}\frac{I-F(z)}{I-z} = \lim_{\Gamma_\alpha\ni z\to 1}F'(z) = A^{-1}$$

证明 作函数

$$G(z) = (I+F(z))(I-F(z))^{-1} - (1+z)(1-z)^{-1}A$$

则由式(3)知 $\mathrm{R}_eG(z)>0(z\in\Delta)$. 由(4)，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ z_0\in\Delta$ 使

$$\frac{|1-z_0|^2}{1-|z_0|^2}\| \mathrm{R}_eG(z_0) \| < \varepsilon \tag{5}$$

令 $$H(\zeta) = (\mathrm{R}_eG(z_0))^{-\frac{1}{2}}\left[G\left(\frac{\zeta+z_0}{1+\bar{z}_0\zeta}\right) - i\mathrm{I}_mG(z_0)\right](\mathrm{R}_eG(z_0))^{-\frac{1}{2}}$$

则 $\mathrm{R}_eH(\zeta)>0$，$(\zeta\in\Delta)$且 $H(0)=I$，由引理 1 有

$$\| H(\zeta) \| \leqslant \frac{1+|\zeta|}{1-|\zeta|} \leqslant \frac{4}{1-|\zeta|^2} \qquad (\zeta\in\Delta) \tag{6}$$

对 $z\in\Gamma_\alpha$，不妨设$|z-1|<\frac{1}{2}$，则$|1+z|>\frac{3}{2}$. 令 $\zeta=\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0z}$，则由式(5)及式(6)有

$$\begin{aligned}\| \frac{1-z}{1+z}G(z) \| &\leqslant \left|\frac{1-z}{1+z}\right| \| \mathrm{R}_eG(z_0) \| \ \| H\left(\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0z}\right) \| + \left|\frac{1-z}{1+z}\right| \| \mathrm{I}_mG(z_0) \| \\ &\leqslant \left|\frac{1-z}{1+z}\right| \| \mathrm{R}_eG(z_0) \| \frac{4|1-\bar{z}_0z|^2}{(1-|z_0|^2)(1-|z|^2)} \\ &\quad + \left|\frac{1-z}{1+z}\right| \| \mathrm{I}_mG(z_0) \| \leqslant \frac{8}{3}\alpha\varepsilon\left|\frac{1-\bar{z}_0z}{1-z_0}\right|^2 + \frac{2}{3}|1-z| \| \mathrm{I}_mG(z_0) \|\end{aligned}$$

因此 $$\limsup_{\Gamma_\alpha\ni z\to 1}\| \frac{1-z}{1+z}G(z) \| \leqslant \frac{8}{3}\alpha e$$

由 ε 的任意性知

$$\lim_{\Gamma_\alpha\ni z\to 1}\| \frac{1-z}{1+z}G(z) \| = \lim_{\Gamma_\alpha\ni z\to 1}\| \frac{1-z}{1+z}(I+F(z))(I-F(z))^{-1} - A \| = 0 \tag{7}$$

应用引理 2 便有

$$\lim_{\Gamma_a \ni z \to 1} \| (1-z)(I-F(z))^{-1} - A \| = 0 \tag{8}$$

再由引理 2 得

$$\left\| \frac{I-F(z)}{1-z} - A^{-1} \right\| = \left\| \frac{I-F(z)}{1-z}((1-z)(I-F(z))^{-1} - A)A^{-1} \right\|$$
$$\leqslant \| A^{-1} \| \alpha' \| (1-z)(I-F(z))^{-1} - A \|$$

所以由式(8)有

$$\lim_{\Gamma_a \ni z \to 1} \frac{I-F(z)}{1-z} = A^{-1} \tag{9}$$

往证 $\lim\limits_{\Gamma_a \ni z - 1} F'(z) = A^{-1}$. 记 $E(z) = I - F(z) - A^{-1}(1-z)$，由 Cauchy 积分公式[2]有

$$E'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{E(w)}{(w-z)^2} dw$$

其中 C 为引理 3 中的圆 $C_h(z)$：$|w-z| = h|z-1|$，它对任何 $z \in \Gamma_a$ 均落在一固定的 stolz 角中。于是，由式(9)当 $\Gamma_a \ni z \to 1$ 时有

$$\| F'(z) - A^{-1} \| = \| E'(z) \| \leqslant \frac{1}{h|z-1|} \max_{w \in C} \| E(w) \|$$
$$= \frac{|1-w|}{h|z-1|} \max_{w \in C} \left\| \frac{I-F(w)}{1-w} - A^{-1} \right\|$$
$$\leqslant \frac{1+h}{h} \max_{w \in C} \left\| \frac{I-F(w)}{1-w} - A^{-1} \right\| \to 0 \text{（证毕）}$$

3 注 记

（1）我们在证明定理的过程中并未象文献[1]中提示的那样用到正规族理论，而是直接推得定理。

（2）Ky Fan 在文献[3]中对定义在右半平面上具有正实部的算子值解析函数建立了相应的定理，由此可推得(7)式，但不能得到我们定理中的结果。

（3）在文献[3]中证明 $\lim\limits_{\Sigma_k \ni z \to \infty} F'(z) = A$ 时，仅要求圆 $C_h(z)$：$|w-z| = h|z|$ 落在右半平面 Π 中是不够的，而是落在某个固定的角域 $\Sigma_{k'} = \{z: |\mathrm{I}_m z| < k' \mathrm{R}_e z\}$ 中，这样的 h 一定存在，可类似于引理 3 来说明这一点，在此不再赘述。

参 考 文 献

1 Garnett J B. Bounded Analytic Functions, Academic Press, New York, London, 1981

2 Hille E and Phillips R S. Functional Analysis and Semigroups. Rev Ed, Amer Math Soc. , Providence, R I 1957

3 Ky Fan. The Angular Derivative of An Operator—valued Analytic Function. Pacific J Math, 1986：121 (1)：67—72

The Julia—Wolff Lemma for Operator—Valued Analytic Functions

Zhu Jianmin