国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第14卷第4期 1992年12月 Vol. 14 No. 4

计算机辅助复杂曲面轮廓度误差评定的通用数学模型*

全 荣 杨泰来
（精密机械与仪器系）

摘 要 本文建立了用最小二乘法评定复杂曲面面轮廓度误差的通用数学模型。运用该模型可对任意曲面面轮廓度进行评定，从而将平面度、圆柱度、球度以及任何面轮廓度误差的评定归结在统一的模式中。由于所建立的模型直观、明了，很容易在计算机上实现，因而可在生产实际中普遍推广应用。并对轮廓度误差进行了定性和定量分析，将其分离成形状误差、参数误差和位姿误差；给出了分离公式和误差补偿原则。

关键词 复杂曲面，面轮廓度，数学模型，评定，最小二乘法
分类号 TH161.2

近年来，复杂曲面的测量已引起了国内外有关方面的普遍重视和广泛研究。按照国家标准GB1958-80和国际ISO 1101的规定，最小条件是评定面轮廓度误差的基本原则，但在实际执行中，不能实现这一原则，存在的问题是：(1) 如何按最小条件（最小区域原则或最大实体条件）评定面轮廓度？(2) 如何判别所得结果是否满足最小条件？国内外有关学者虽然开展了大量研究，在理论上给出了一些评定模型[1],[2]，但按这些模型进行评定，计算工作量很大，特别是当曲面维数较大时，甚至根本得不出结果。为此，本文对用最小二乘法评定复杂曲面轮廓度进行了研究。最小二乘法在形位误差的评定中，是一种广为采用的方法，虽然它与最小条件法相比存在一定的误差，但在生产实际中，它一般均能满足要求。

1 理想曲面的描述

空间理想曲面 S 可表示为

$$f(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

空间曲线则可认为是两曲面 $f(x, y, z)=0$ 和 $g(x, y, z)=0$ 的交线。理想曲面 S 通常是充分光滑的或是分区光滑的。S 上的任一点的特征可用下面三个矢量：矢径 $\boldsymbol{p}$、单位法矢量 $\boldsymbol{n}$、球切线矢量 $\boldsymbol{\tau}$ 来描述，它们分别定义为：

$$\begin{cases} \boldsymbol{p} = \boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}z \\ \|\boldsymbol{p}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{cases} \tag{2}$$

* 1992年2月15日收稿

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\cos\beta + \boldsymbol{k}\cos\gamma \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{n} &= \boldsymbol{i}(y\cos\gamma - z\cos\beta) + \boldsymbol{j}(z\cos\alpha - x\cos\gamma) + \boldsymbol{k}(x\cos\beta - y\cos\alpha) \\ &= \boldsymbol{i}\tau_x + \boldsymbol{j}\tau_y + \boldsymbol{k}\tau_z\end{aligned} \tag{4}$$

式中：$\cos\alpha = f_x / \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}$； $\cos\beta = f_y / \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}$；

$$\cos\gamma = f_z / \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}$$

$$f_x = \partial f / \partial x; \quad f_y = \partial f / \partial y; \quad f_z = \partial f / \partial z.$$

矢量 $\boldsymbol{p}$、$\boldsymbol{n}$ 和 τ 具有明显的特征。τ 在 S 的切面内，并且切于 S 与球面(以原点为球心，以 $\|\boldsymbol{p}\|$ 为半径)的交线。当 $\boldsymbol{p}//\boldsymbol{n}$ 时，S 与球面相切，$\|\tau\|=0$，τ 的方向不定，这时 τ 的方向可在 S 的切面内任意指定。$\boldsymbol{p}$、$\boldsymbol{n}$ 和 τ 可以看成是曲面 S 在该点的坐标轴，三者组成右手坐标系。

对于曲面 S，我们定义影响函数 $\lambda(\boldsymbol{p})$ 为

$$\lambda(\boldsymbol{p}) = [\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma, \tau_x, \tau_y, \tau_z]^T \tag{5}$$

式中：$\boldsymbol{p}=[x, y, z]^T$； $\tau_x = y\cos\gamma - z\cos\beta$；$\tau_y = z\cos\alpha - x\cos\gamma$；$\tau_z = x\cos\beta - y\cos\alpha$

$\lambda(\boldsymbol{p})$ 是由曲面 S 的特征决定的，由 $\boldsymbol{n}$ 和 τ 的元素所组成。

2 模型的建立

设由测量仪器测得实际曲面各点坐标 $\boldsymbol{p}_i=[x_i, y_i, z_i]^T$，其中 $i=1, 2, \cdots, N$，N 为测点数。在小偏差假设和小误差假设[3]条件下，实测点 $\boldsymbol{p}_i$ 均在理想曲面 S 的附近。$\boldsymbol{p}_i$ 到 S 的距离 $d(\boldsymbol{p}_i)$ 为

$$d(\boldsymbol{p}_i) = d(x_i, y_i, z_i) = f(x_i, y_i, z_i) / \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2} \tag{6}$$

由于测量时的基准要素与理想要素必然有偏差，在评定时应该微量调整。在一般情况下，微量调整包括三个方向的微分移动 Δ_x、Δ_y、Δ_z 和微分转动 θ_x、θ_y、θ_z. 令 $\boldsymbol{u}=[\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z]^T$ 称为描述变量，它描述要素的位置和姿态（方向）。对于某些特殊的曲面，如球面、圆柱面等，描述要素的位置和方向并不需要 6 个独立变量，这时 $\boldsymbol{u}$ 的维数小于 6.

微量调整后实测点的坐标 $\boldsymbol{p}_i^* = [x_i^*, y_i^*, z_i^*]^T$ 可利用微分变换公式得到：

$$\begin{pmatrix} x_i^* \\ y_i^* \\ z_i^* \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\theta_z & \theta_y & \Delta_x \\ \theta_z & 1 & -\theta_x & \Delta_y \\ -\theta_y & \theta_x & 1 & \Delta_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$\boldsymbol{p}_i^*$ 到理想曲面 S 的距离和 $\boldsymbol{u}$ 有关，因此记为 $d(\boldsymbol{p}_i^*) = d(\boldsymbol{p}_i; \boldsymbol{u})$，称为描述函数，它是 $\boldsymbol{u}$ 的线性函数。由式(6)可知

$$d(\boldsymbol{p}_i^*) = f(x_i^*, y_i^*, z_i^*) / \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2} \tag{8}$$

由于 $f(x, y, z)$ 充分光滑，并且 $\boldsymbol{u}=[\Delta_x、\Delta_y、\Delta_z、\theta_x、\theta_y、\theta_z]^T$ 是微量，因此有

$$f(x_i^*, y_i^*, z_i^*) = f(x_i, y_i, z_i) + f_x[\Delta_x - y_i\theta_z + z_i\theta_y]$$

$$+ f_y[\Delta_y + x_i\theta_z - z_i\theta_x] + f_z[\Delta_z - x_i\theta_y + y_i\theta_x]$$

将上式代入式(8)，经化简后得

$$d(\boldsymbol{p}_i;\boldsymbol{u}) = d(\boldsymbol{p}_i) + \boldsymbol{u}^T\lambda(\boldsymbol{p}_i) \tag{9}$$

为了按最小二乘方评定曲面轮廓度，由描述函数 $d(\boldsymbol{p}_i;\ \boldsymbol{u})$定义：

$$D^2(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} d^2(\boldsymbol{p}_i;\ \boldsymbol{u}) \tag{10}$$

很明显，$D^2(\boldsymbol{u})$为实测点 $\boldsymbol{p}_i$ 到评定基准的均方差函数。

由最小二乘方的定义，按最小二乘法评定曲面轮廓度，就是要使 $D^2(\boldsymbol{u})$达到最小值，即

$$\min D^2(\boldsymbol{u}) \tag{11}$$

由式(9)和(10)，我们有

$$D^2(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(d(\boldsymbol{p}_i) + \boldsymbol{u}^T\lambda(\boldsymbol{p}_i))^2 \tag{12}$$

为了求出式(12)的最小值，对它求 $\boldsymbol{u}$ 的导数（因 $\boldsymbol{u}$ 是矢量，即求 $\boldsymbol{u}$ 各分量的偏导数），并令其为零。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial D^2(\boldsymbol{u})}{\partial \Delta_x} &= \frac{\partial}{\partial \Delta_x}\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[d(\boldsymbol{p}_i)+\boldsymbol{u}^T\lambda(\boldsymbol{p}_i)]^2\right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial \Delta_x}\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[d(\boldsymbol{p}_i)+(\Delta_x,\Delta_y,\Delta_z,\theta_x,\theta_y,\theta_z)\cdot(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma,\tau_x,\tau_y,\tau_z)^T]^2\right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial \Delta_x}\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[d(\boldsymbol{p}_i)+\Delta_x\cos\alpha+\Delta_y\cos\beta+\Delta_z\cos\gamma+\theta_x\tau_x+\theta_y\tau_y+\theta_z\tau_z]^2\right\} \\
&= \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}(d(\boldsymbol{p}_i)\cos\alpha+\Delta_x\cos^2\alpha+\Delta_y\cos\alpha\cos\beta \\
&\quad +\Delta_z\cos\alpha\cos\gamma+\theta_x\tau_x\cos\alpha+\theta_y\tau_y\cos\alpha+\theta_z\tau_z\cos\alpha)=0
\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N} d(\boldsymbol{p}_i)\cos\alpha + \Delta_x\sum_{i=1}^{N}\cos^2\alpha + \Delta_y\sum_{i=1}^{N}\cos\alpha\cos\beta \\
&\qquad + \Delta_z\sum_{i=1}^{N}\cos\alpha\cos\gamma + \theta_x\sum_{i=1}^{N}\tau_x\cos\alpha + \theta_y\sum_{i=1}^{N}\tau_y\cos\alpha + \theta_z\sum_{i=1}^{N}\tau_z\cos\alpha = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Delta_x\sum_{i=1}^{N}\cos^2\alpha + \Delta_y\sum_{i=1}^{N}\cos\alpha\cos\beta + \Delta_z\sum_{i=1}^{N}\cos\alpha\cos\gamma + \theta_x\sum_{i=1}^{N}\tau_x\cos\alpha \\
&\qquad + \theta_y\sum_{i=1}^{N}\tau_y\cos\alpha + \theta_z\sum_{i=1}^{N}\tau_z\cos\alpha = -\sum_{i=1}^{N} d(\boldsymbol{p}_i)\cos\alpha
\end{aligned} \tag{13}$$

同理对 Δ_y、Δ_z、θ_x、θ_y、θ_z 求偏导数，并令其等于零，经化简得（为便于书写下面均用 Σ 代替 $\sum_{i=1}^{N}$）：

$$\begin{aligned}
&\Delta_x\Sigma\cos\alpha\cos\beta + \Delta_y\Sigma\cos^2\beta + \Delta_z\Sigma\cos\beta\cos\gamma + \theta_x\Sigma\tau_x\cos\beta \\
&\qquad + \theta_y\Sigma\tau_y\cos\beta + \theta_z\Sigma\tau_z\cos\beta = -\Sigma d(\boldsymbol{p}_i)\cos\beta
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\Delta_x\Sigma\cos\alpha\cos\gamma + \Delta_y\Sigma\cos\beta\cos\gamma + \Delta_z\Sigma\cos^2\gamma + \theta_x\Sigma\tau_x\cos\gamma$$

$$+\theta_y\Sigma\tau_y\cos\gamma+\theta_z\Sigma\tau_z\cos\gamma=-\Sigma d(\boldsymbol{p}_i)\cos\gamma \tag{15}$$

$$\Delta_x\Sigma\tau_x\cos\alpha+\Delta_y\Sigma\tau_x\cos\beta+\Delta_z\Sigma\tau_x\cos\gamma+\theta_x\Sigma\tau_x^2$$
$$+\theta_y\Sigma\tau_x\tau_y+\theta_z\Sigma\tau_x\tau_z=-\Sigma d(\boldsymbol{p}_i)\tau_x \tag{16}$$

$$\Delta_x\Sigma\tau_y\cos\alpha+\Delta_y\Sigma\tau_y\cos\beta+\Delta_z\Sigma\tau_y\cos\gamma+\theta_x\Sigma\tau_x\tau_y$$
$$+\theta_y\Sigma\tau_y^2+\theta_z\Sigma\tau_y\tau_z=-\Sigma d(\boldsymbol{p}_i)\tau_y \tag{17}$$

$$\Delta_x\Sigma\tau_z\cos\alpha+\Delta_y\Sigma\tau_z\cos\beta+\Delta_z\Sigma\tau_z\cos\gamma+\theta_x\Sigma\tau_x\tau_z$$
$$+\theta_y\Sigma\tau_y\tau_z+\theta_z\Sigma\tau_z^2=-\Sigma d(\boldsymbol{p}_i)\tau_z \tag{18}$$

解式(13)～(18)所组成的线性方程组，得最小二乘方解 $\boldsymbol{u}^*$

$$\boldsymbol{u}^*=(\Delta_x^*,\Delta_y^*,\Delta_z^*,\theta_x^*,\theta_y^*,\theta_z^*)^T \tag{19}$$

式中：
$$\Delta_x^*=\frac{D\Delta_x}{D};\quad \Delta_y^*=\frac{D\Delta_y}{D};\quad \Delta_z^*=\frac{D\Delta_z}{D};$$

$$\theta_x^*=\frac{D\theta_x}{D};\theta_y^*=\frac{D\theta_y}{D};\theta_z^*=\frac{D\theta_z}{D};$$

$$D=\begin{vmatrix}
\Sigma\cos^2\alpha & \Sigma\cos\alpha\cos\beta & \Sigma\cos\alpha\cos\gamma & \Sigma\tau_x\cos\alpha & \Sigma\tau_y\cos\alpha & \Sigma\tau_z\cos\alpha\\
\Sigma\cos\alpha\cos\beta & \Sigma\cos^2\beta & \Sigma\cos\beta\cos\gamma & \Sigma\tau_x\cos\beta & \Sigma\tau_y\cos\beta & \Sigma\tau_z\cos\beta\\
\Sigma\cos\alpha\cos\gamma & \Sigma\cos\beta\cos\gamma & \Sigma\cos^2\gamma & \Sigma\tau_x\cos\gamma & \Sigma\tau_y\cos\gamma & \Sigma\tau_z\cos\gamma\\
\Sigma\tau_x\cos\alpha & \Sigma\tau_x\cos\beta & \Sigma\tau_x\cos\gamma & \Sigma\tau_x^2 & \Sigma\tau_x\tau_y & \Sigma\tau_x\tau_z\\
\Sigma\tau_y\cos\alpha & \Sigma\tau_y\cos\beta & \Sigma\tau_y\cos\gamma & \Sigma\tau_x\tau_y & \Sigma\tau_y^2 & \Sigma\tau_y\tau_z\\
\Sigma\tau_z\cos\alpha & \Sigma\tau_z\cos\beta & \Sigma\tau_z\cos\gamma & \Sigma\tau_x\tau_z & \Sigma\tau_y\tau_z & \Sigma\tau_z^2
\end{vmatrix}\neq 0$$

$$D\Delta_x=\begin{vmatrix}
-\Sigma d(\boldsymbol{p}_i)\cos\alpha & \Sigma\cos\alpha\cos\beta & \Sigma\cos\alpha\cos\gamma & \Sigma\tau_x\cos\alpha & \Sigma\tau_y\cos\alpha & \Sigma\tau_z\cos\alpha\\
-\Sigma d(\boldsymbol{p}_i)\cos\beta & \Sigma\cos^2\beta & \Sigma\cos\beta\cos\gamma & \Sigma\tau_x\cos\beta & \Sigma\tau_y\cos\beta & \Sigma\tau_z\cos\beta\\
-\Sigma d(\boldsymbol{p}_i)\cos\gamma & \Sigma\cos\beta\cos\gamma & \Sigma\cos^2\gamma & \Sigma\tau_x\cos\gamma & \Sigma\tau_y\cos\gamma & \Sigma\tau_z\cos\gamma\\
-\Sigma d(\boldsymbol{p}_i)\tau_x & \Sigma\tau_x\cos\beta & \Sigma\tau_x\cos\gamma & \Sigma\tau_x^2 & \Sigma\tau_x\tau_y & \Sigma\tau_x\tau_z\\
-\Sigma d(\boldsymbol{p}_i)\tau_y & \Sigma\tau_y\cos\beta & \Sigma\tau_y\cos\gamma & \Sigma\tau_x\tau_y & \Sigma\tau_y^2 & \Sigma\tau_y\tau_z\\
-\Sigma d(\boldsymbol{p}_i)\tau_z & \Sigma\tau_z\cos\beta & \Sigma\tau_z\cos\gamma & \Sigma\tau_x\tau_z & \Sigma\tau_y\tau_z & \Sigma\tau_z^2
\end{vmatrix}$$

$$D\Delta_y=\begin{vmatrix}
\Sigma\cos^2\alpha & -\Sigma d(\boldsymbol{p}_i)\cos\alpha & \Sigma\cos\alpha\cos\gamma & \Sigma\tau_x\cos\alpha & \Sigma\tau_y\cos\alpha & \Sigma\tau_z\cos\alpha\\
\Sigma\cos\alpha\cos\beta & -\Sigma d(\boldsymbol{p}_i)\cos\beta & \Sigma\cos\beta\cos\gamma & \Sigma\tau_x\cos\beta & \Sigma\tau_y\cos\beta & \Sigma\tau_z\cos\beta\\
\Sigma\cos\alpha\cos\gamma & -\Sigma d(\boldsymbol{p}_i)\cos\gamma & \Sigma\cos^2\gamma & \Sigma\tau_x\cos\gamma & \Sigma\tau_y\cos\gamma & \Sigma\tau_z\cos\gamma\\
\Sigma\tau_x\cos\alpha & -\Sigma d(\boldsymbol{p}_i)\tau_x & \Sigma\tau_x\cos\gamma & \Sigma\tau_x^2 & \Sigma\tau_x\tau_y & \Sigma\tau_x\tau_z\\
\Sigma\tau_y\cos\alpha & -\Sigma d(\boldsymbol{p}_i)\tau_y & \Sigma\tau_y\cos\gamma & \Sigma\tau_x\tau_y & \Sigma\tau_y^2 & \Sigma\tau_y\tau_z\\
\Sigma\tau_z\cos\alpha & -\Sigma d(\boldsymbol{p}_i)\tau_z & \Sigma\tau_z\cos\gamma & \Sigma\tau_x\tau_z & \Sigma\tau_y\tau_z & \Sigma\tau_z^2
\end{vmatrix}$$

$$D\Delta_z=\begin{vmatrix}
\Sigma\cos^2\alpha & \Sigma\cos\alpha\cos\beta & -\Sigma d(\boldsymbol{p}_i)\cos\alpha & \Sigma\tau_x\cos\alpha & \Sigma\tau_y\cos\alpha & \Sigma\tau_z\cos\alpha\\
\Sigma\cos\alpha\cos\beta & \Sigma\cos^2\beta & -\Sigma d(\boldsymbol{p}_i)\cos\beta & \Sigma\tau_x\cos\beta & \Sigma\tau_y\cos\beta & \Sigma\tau_z\cos\beta\\
\Sigma\cos\alpha\cos\gamma & \Sigma\cos\beta\cos\gamma & -\Sigma d(\boldsymbol{p}_i)\cos\gamma & \Sigma\tau_x\cos\gamma & \Sigma\tau_y\cos\gamma & \Sigma\tau_z\cos\gamma\\
\Sigma\tau_x\cos\alpha & \Sigma\tau x\cos\beta & -\Sigma d(\boldsymbol{p}_i)\tau_x & \Sigma\tau_x^2 & \Sigma\tau_x\tau_y & \Sigma\tau_x\tau_z\\
\Sigma\tau_y\cos\alpha & \Sigma\tau_y\cos\beta & -\Sigma d(\boldsymbol{p}_i)\tau_y & \Sigma\tau_x\tau_y & \Sigma\tau_y^2 & \Sigma\tau_y\tau_z\\
\Sigma\tau_z\cos\alpha & \Sigma\tau_z\cos\beta & -\Sigma d(\boldsymbol{p}_i)\tau_z & \Sigma\tau_x\tau_z & \Sigma\tau_y\tau_z & \Sigma\tau_z^2
\end{vmatrix}$$

$$
D\theta_x = \begin{vmatrix}
\Sigma\cos^2\alpha & \Sigma\cos\alpha\cos\beta & \Sigma\cos\alpha\cos\gamma & -\Sigma d(\boldsymbol{p}_i)\cos\alpha & \Sigma\tau_y\cos\alpha & \Sigma\tau_z\cos\alpha \\
\Sigma\cos\alpha\cos\beta & \Sigma\cos^2\beta & \Sigma\cos\beta\cos\gamma & -\Sigma d(\boldsymbol{p}_i)\cos\beta & \Sigma\tau_y\cos\beta & \Sigma\tau_z\cos\beta \\
\Sigma\cos\alpha\cos\gamma & \Sigma\cos\beta\cos\gamma & \Sigma\cos^2\gamma & -\Sigma d(\boldsymbol{p}_i)\cos\gamma & \Sigma\tau_y\cos\gamma & \Sigma\tau_z\cos\gamma \\
\Sigma\tau_x\cos\alpha & \Sigma\tau_x\cos\beta & \Sigma\tau_x\cos\gamma & -\Sigma d(\boldsymbol{p}_i)\tau_x & \Sigma\tau_x\tau_y & \Sigma\tau_x\tau_z \\
\Sigma\tau_y\cos\alpha & \Sigma\tau_y\cos\beta & \Sigma\tau_y\cos\gamma & -\Sigma d(\boldsymbol{p}_i)\tau_y & \Sigma\tau_y^2 & \Sigma\tau_y\tau_z \\
\Sigma\tau_z\cos\alpha & \Sigma\tau_z\cos\beta & \Sigma\tau_z\cos\gamma & -\Sigma d(\boldsymbol{p}_i)\tau_z & \Sigma\tau_y\tau_z & \Sigma\tau_z^2
\end{vmatrix}
$$

$$
D\theta_y = \begin{vmatrix}
\Sigma\cos^2\alpha & \Sigma\cos\alpha\cos\beta & \Sigma\cos\alpha\cos\gamma & \Sigma\tau_x\cos\alpha & -\Sigma d(\boldsymbol{p}_i)\cos\alpha & \Sigma\tau_z\cos\alpha \\
\Sigma\cos\alpha\cos\beta & \Sigma\cos^2\beta & \Sigma\cos\beta\cos\gamma & \Sigma\tau_x\cos\beta & -\Sigma d(\boldsymbol{p}_i)\cos\beta & \Sigma\tau_z\cos\beta \\
\Sigma\cos\alpha\cos\gamma & \Sigma\cos\beta\cos\gamma & \Sigma\cos^2\gamma & \Sigma\tau_x\cos\gamma & -\Sigma d(\boldsymbol{p}_i)\cos\gamma & \Sigma\tau_z\cos\gamma \\
\Sigma\tau_x\cos\alpha & \Sigma\tau_x\cos\beta & \Sigma\tau_x\cos\gamma & \Sigma\tau_x^2 & -\Sigma d(\boldsymbol{p}_i)\tau_x & \Sigma\tau_x\tau_z \\
\Sigma\tau_y\cos\alpha & \Sigma\tau_y\cos\beta & \Sigma\tau_y\cos\gamma & \Sigma\tau_x\tau_y & -\Sigma d(\boldsymbol{p}_i)\tau_y & \Sigma\tau_y\tau_z \\
\Sigma\tau_z\cos\alpha & \Sigma\tau_z\cos\beta & \Sigma\tau_z\cos\gamma & \Sigma\tau_x\tau_z & -\Sigma d(\boldsymbol{p}_i)\tau_z & \Sigma\tau_z^2
\end{vmatrix}
$$

$$
D\theta_z = \begin{vmatrix}
\Sigma\cos^2\alpha & \Sigma\cos\alpha\cos\beta & \Sigma\cos\alpha\cos\gamma & \Sigma\tau_x\cos\alpha & \Sigma\tau_y\cos\alpha & -\Sigma d(\boldsymbol{p}_i)\cos\alpha \\
\Sigma\cos\alpha\cos\beta & \Sigma\cos^2\beta & \Sigma\cos\beta\cos\gamma & \Sigma\tau_x\cos\beta & \Sigma\tau_y\cos\beta & -\Sigma d(\boldsymbol{p}_i)\cos\beta \\
\Sigma\cos\alpha\cos\gamma & \Sigma\cos\beta\cos\gamma & \Sigma\cos^2\gamma & \Sigma\tau_x\cos\gamma & \Sigma\tau_y\cos\gamma & -\Sigma d(\boldsymbol{p}_i)\cos\gamma \\
\Sigma\tau_x\cos\alpha & \Sigma\tau_x\cos\beta & \Sigma\tau_x\cos\gamma & \Sigma\tau_x^2 & \Sigma\tau_x\tau_y & -\Sigma d(\boldsymbol{p}_i)\tau_x \\
\Sigma\tau_y\cos\alpha & \Sigma\tau_y\cos\beta & \Sigma\tau_y\cos\gamma & \Sigma\tau_x\tau_y & \Sigma\tau_y^2 & -\Sigma d(\boldsymbol{p}_i)\tau_y \\
\Sigma\tau_z\cos\alpha & \Sigma\tau_z\cos\beta & \Sigma\tau_z\cos\gamma & \Sigma\tau_x\tau_z & \Sigma\tau_y\tau_z & -\Sigma d(\boldsymbol{p}_i)\tau_z
\end{vmatrix}
$$

将式(19)代入式(9)得

$$
d(\boldsymbol{p}_i;\ \boldsymbol{u}^*) = d(\boldsymbol{p}_i) + \boldsymbol{u}^{*T}\lambda(\boldsymbol{p}_i) \tag{20}
$$

令

$$
\overline{D}(\boldsymbol{u}^*) = \max\{d(\boldsymbol{p}_i;\ \boldsymbol{u}^*);i = 1,2,\cdots,N\}
$$

$$
\underline{D}(\boldsymbol{u}^*) = \min\{d(\boldsymbol{p}_i;\ \boldsymbol{u}^*);i = 1,2,\cdots,N\}
$$

则用最小二乘法评定任意复杂曲面面轮廓度误差 $E(\boldsymbol{u}^*)$为

$$
E(\boldsymbol{u}^*) = \overline{D}(\boldsymbol{u}^*) - \underline{D}(\boldsymbol{u}^*) \tag{21}
$$

至此，由式(1)、(3)、(4)、(6)、(19)～(21)所组成的算式即为用最小二乘法评定复杂曲面轮廓度的通用数学模型。

按此模型评定曲面轮廓度的步骤如下：

(1) 计算 f_x、f_y、f_z；(2) 计算 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$；(3) 计算 τ_x、τ_y、τ_z 构造 $\lambda(\boldsymbol{p}_i)$；(4) 计算 $d(\boldsymbol{p}_i)$；(5) 计算 $\boldsymbol{u}^*$；(6) 按标准置换算法求解 $\overline{D}(\boldsymbol{u}^*)$、$\underline{D}(\boldsymbol{u}^*)$；(7) 计算 $E(\boldsymbol{u}^*)$.

按此步骤，编制计算机程序即可很方便地求出各类曲面的面轮廓度误差。

3 模型的应用

3.1 描述函数

表 1 列出了椭球面、球面、抛物面、平面和圆柱面的距离函数 $d(\boldsymbol{p})$、影响函数 $\lambda(\boldsymbol{p})$的各分量及描述变量 $\boldsymbol{u}$ 的维数和分量。从而可以计算出相应曲面的最小二乘解 $\boldsymbol{u}^*$，进

而求出 $\overline{D}(\boldsymbol{u}^*)$和 $\underline{D}(\boldsymbol{u}^*)$，即可计算出各类曲面的面轮廓度误差 $E(\boldsymbol{u}^*)$（为节省篇幅，有关各类曲面 $\boldsymbol{u}^*$ 的表达式未列出，读者根据通用数学模型可以很方便地求出）。实际上还可列出圆锥面、非圆柱面和螺旋面等的 $d(\boldsymbol{p})$、$\lambda(\boldsymbol{p})$、$\boldsymbol{u}$. 从表中可以看出：(1) 球面是椭球面的特殊情况，$a=b=c$. (2) 平面是抛物面的特殊情况：$a^2=b^2\gg x, y, z$. (3) 圆柱面是柱面和圆锥面的特殊情况。因此，平面、圆柱面和球面的评定都可以看成是面轮廓度的特例。至此，可将平面度、圆柱度以及任何面轮廓度的评定统一起来，用通用数学模型予以解决。

表 1　各类曲面轮廓特征

曲面类型	椭球面	球　面	抛物面	平　面	圆柱面
曲面方程	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	$x^2+y^2+z^2=a^2$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2z=0$	$z=0$	$x^2+y^2=a^2$
f_x	$2x/a^2$	$2x$	$2x/a^2$	0	$2x$
f_y	$2y/b^2$	$2y$	$2y/b^2$	0	$2y$
f_z	$2z/c^2$	$2z$	-2	1	0
$\cos\alpha$	x/d	x/a	$x/a^2\rho$	0	$x/\sqrt{x^2+y^2}$
$\cos\beta$	$\mu y/d$	y/a	$y/b^2\rho$	0	$y/\sqrt{x^2+y^2}$
$\cos\gamma$	vz/d	z/a	$-\rho^{-1}$	1	0
	$d=\sqrt{x^2+\mu^2y^2+v^2z^2}$ $\mu=a^2/b^2$ $v=a^2/c^2$	$a=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$	$\rho=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}}$		$a=\sqrt{x^2+y^2}$
τ_x	$(v-\mu)yz/d$	0	$-y(b^2+z)/b^2\rho$	$-y$	$-yz/a$
τ_y	$(1-v)xz/d$	0	$x(a^2+z)/a^2\rho$	x	xz/a
τ_z	$(\mu-1)xy/d$	0	$xy(a^2-b^2)/a^2b^2\rho$	0	0
$\lambda(\boldsymbol{p})$	式(5)	$\left(\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{z}{a}\right)^T$	式(5)	$(-y,x)^T$	$\left(\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{-yz}{a},\frac{xz}{a}\right)^T$
$d(\boldsymbol{p})$	$\frac{x^2+\mu y^2+vz^2-a^2}{2\sqrt{x^2+\mu^2y^2+v^2z^2}}$	$\frac{x^2+y^2+z^2-a^2}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$	$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2z\right)/2\rho$	z	$\frac{x^2+y^2-a^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}$
$\boldsymbol{u}$	$(\Delta_x,\Delta_y,\Delta_z,\theta_x,\theta_y,\theta_z)^T$	$(\Delta_x,\Delta_y,\Delta_a)^T$	$(\Delta_x,\Delta_y,\Delta_z,\theta_x,\theta_y,\theta_z)^T$	$(\theta_x,\theta_y)^T$	$(\Delta_x,\Delta_y,\theta_x,\theta_y)^T$
n	6	3	6	2	4

3.2　维数的确定

(1) 自由曲面轮廓度评定的维数

我们根据影响函数 $\lambda(\boldsymbol{p})$的各分量（表 1），便可确定各曲面轮廓度评定的维数，它等于 $\lambda(\boldsymbol{p})$的非定常分量的数目，用 n_0 表示，例如：

椭球面，$a>b>c$，$\lambda(\boldsymbol{p})=[\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma,\ \tau_x,\ \tau_y,\ \tau_z]^T$ 各分量都不是常量，$\boldsymbol{u}=[\Delta_x,\ \Delta_y,\ \Delta_z,\ \theta_x,\ \theta_y,\ \theta_z]^T$，因此是 6 维的。

非圆柱面，可以推出 $\cos\gamma=0$，其它非定常量组成 $\lambda(\boldsymbol{p})=[\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \tau_x,\ \tau_y,\ \tau_z]^T$；$\boldsymbol{u}=[\Delta_x,\ \Delta_y,\ \theta_x,\ \theta_y,\ \theta_z]^T$ 是 5 维的。

同样方法可确定圆柱面、球面、平面的维数。

(2) 定向误差、定位误差评定的维数

对于定向误差、定位误差（并联要素）的情况，描述变量 $\boldsymbol{u}$ 受到等式约束，其维数 n 等于 $\boldsymbol{u}$ 的维数 n_0 减去 $\boldsymbol{u}$ 受到的独立约束的数目 s，即

$$n = n_0 - s \tag{22}$$

例如：评定基准平面 xy（即 $z=0$），相当给定约束条件 $\Delta_z=0$，$\theta_x=0$，$\theta_y=0$. 对于椭球面而言受到三个约束后 $\boldsymbol{u}=[\Delta_x, \Delta_y, \theta_z]^T$ 是 3 维的。这样一来，我们将定向误差和定位误差的评定问题也统一在通用数学模型中，由于受到约束并联之后，维数下降，计算简化。

应该说明的是，评定问题的维数与曲面参数方程中参数的个数是不同的，前者是指独立描述变量 u 的个数；后者是指曲面方程独立参数的个数（一般为 2）。

3.3 误差分离和误差补偿

(1) 轮廓度误差分离

复杂曲面轮廓度误差由三部分组成：形状误差、参数误差和位姿误差。因三者具有不同的性质，故采用不同的评定和剔除方法。根据最小二乘法评定复杂曲面的结果，实际上是将轮廓度误差分离成三部分：(i) 形状误差 $E(\boldsymbol{u}^*)=\overline{D}(\boldsymbol{u}^*)-\underline{D}(\boldsymbol{u}^*)$；(ii) 参数误差 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{u}^*)=[\overline{D}(\boldsymbol{u}^*)+\underline{D}(\boldsymbol{u}^*)]/2$；(iii) 位姿误差 $\boldsymbol{u}*$，$\|\boldsymbol{u}*\|_\rho$

因为 $\boldsymbol{u}^*$ 是矢量，它的模 $\|\boldsymbol{u}^*\|_\rho=\sqrt{\Delta_x^{*2}+\Delta_y^{*2}+\Delta_z^{*2}+\rho^2(\theta_x^{*2}+\theta_y^{*2}+\theta_z^{*2})}$，$\rho$ 是选取的等效半径。

(2) 误差补偿

三种误差的补偿方法均不相同，误差补偿的基本原则为：(i) 根据 $\boldsymbol{u}^*$ 值，调整零件加工（测量）的位置和相位；(ii) 根据 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{u}^*)$ 值修正参数误差；(iii) 根据 $E(\boldsymbol{u}^*)$ 的值和极值点的位置，在软件中增减进给脉冲或修正靠模凸轮曲线。

4 结束语

本文按最小二乘方原则建立了评定复杂曲面面轮廓度的通用数学模型。从而为任何曲面面轮廓度的评定提供了理论依据，也为复杂曲面面轮廓度标准的制订和测量奠定了理论基础。由于它直观、明了和易于计算机处理，建立三坐标测量机和其它类似的仪器应具有按最小二乘法评定轮廓度误差（包括其三部分）的功能，并作为评定验收的主要指标之一。

参 考 文 献

1 Xiong Y. Coordinate Techniques of Complex Surfaces and Curves, Proceedings of CIRP on PE & MS, 1991: 147-161

2 Murthy T S R. and Ahdin S Z. Mach. Tools Des., 1980; (20): 123-126

3 熊有伦. 精密测量的数学方法. 北京：中国计量出版社，1989

4 Sostar A. Robotics Comput. Integrated Manufact., 1980, (4): 259-265

A General Mathematic Model of Computer Aided Evaluating Profile Error of Complex Surfaces

Quan Rong Yang Tailai
(Department of Precision Machinery and Instrument)

Abstract

In this paper, a general mathematic model of profile error of complex surfaces is proposed with the least squares evaluation. The profile errors of all kinds of surfaces can be evaluated on the basis of this model. This model is very convenient for computer processing, it can be directly applied in the productive procession. Finally, we deal with error separation and control strategies for quality assurance.

Key words complex surface, profile error, mathematic model, evaluation, the least squares

---

（上接第 116 页）

3 内容丰富、资料翔实

本书不管是从数学角度来看，还是从工程应用角度来看，其内容之丰富、资料之翔实，是国内外已出版的同类著作所不及的。书中既有线性时序分析，又有非线性时序分析；既针对离散系统，又涉及连续系统。全书内容重点放在 ARMA 模型，但不囿于此，而是在 ARMA 模型基础上，扩展到各种有关的时序模型，（如多维时序模型，非平稳时序模型、非线性模型等），以适应时序分析的发展与应用。

当然，作为一部洋洋数十万言的专著，其特点及价值远不仅是以上几点，鉴于国内已有众多权威作出了评价，在此不再赘举。

无庸讳言，作为一部众手合写的著作，这本书也有其不足之处。如作者们虽力求内容之全面与完整，但在全书结构安排上尚欠协调；某些细节也有待完善；有些问题还可进一步展开论述；有些研究成果还有待补充实证材料。当然，这已是近于苛求了。

我相信杨教授这部专著的出版能在我国工程界起一个抛砖引玉作用，今后能有更多、更好的此类著作出版问世，能有更多的同志从事时间序列分析学科的研究工作，使这门充满生机的学科在我国大地上结出丰硕的果实。