

## 摆动滚子从动件圆柱凸轮的解析设计

李栋成 杨昂岳

(精密机械与仪器系)

**摘要** 本文根据微分几何的包络原理, 导出了摆动滚子从动件圆柱凸轮的轮廓曲面方程; 在此基础上, 讨论了凸轮轮廓的根切条件、滚子与凸轮的接触区域、接触线方向以及凸轮任一圆柱面上实际轮廓曲线的确定; 得到了滚子与凸轮任一接触点处的压力角计算公式, 并给出了按许用压力角设计的滚子最小接触高度, 从而较完整地解决了摆动滚子从动件圆柱凸轮的几何设计问题。

**关键词** 圆柱凸轮, 摆动滚子从动件, 包络原理, 轮廓曲面

**分类号** TH112.2

圆柱凸轮是空间凸轮, 鉴于其几何设计的复杂性, 通常把它比照为某一圆柱展开面内的平面凸轮, 然后按平面凸轮来处理。这是一种近似的设计方法。对直动滚子从动件圆柱凸轮, 误差一般不大; 但对摆动滚子从动件圆柱凸轮, 情况就有些不同。首先, 由于摆动滚子与凸轮圆柱面的交线是一变化的空间闭曲线, 因此在展开面内, 凸轮的实际轮廓不再是所谓以理论轮廓为圆心的一系列滚子圆的包络线, 实际轮廓与理论轮廓沿法向亦非等距; 其次, 由于滚子中心相对于圆柱凸轮的运动轨迹不在同一圆柱面上, 故一般来说, 凸轮的压力角不能按平面的摆动滚子从动件移动凸轮来计算<sup>[1]</sup>。为了更准确地认识凸轮的轮廓形状及其运动特性, 本文拟从圆柱凸轮轮廓曲面的研究入手, 对摆动滚子从动件圆柱凸轮几何设计的解析理论作些探讨。

## 1 摆动滚子从动件圆柱凸轮的轮廓曲面

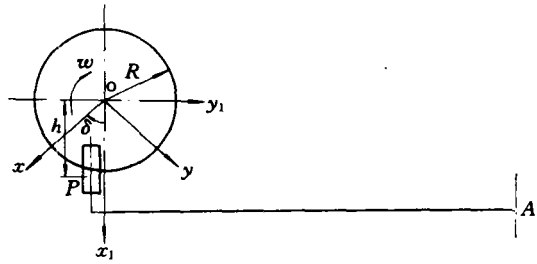
考虑一摆动滚子从动件圆柱凸轮。摆杆 AB 的运动平面平行于凸轮轴线; 摆杆长  $l$ , 中心距  $b$ , 滚子半径  $r_0$ ; 已知摆杆的运动规律  $\theta = f(\delta)$ ,  $\theta$ 、 $\delta$  分别为摆杆的摆角和凸轮的转角, 如图1。

$OX_1Y_1Z_1$  是固定坐标系;  $OY_1$  沿凸轮轴与摆杆轴的最短距离方向,  $OX_1$  垂直并指向摆杆的摆动平面,  $OZ_1$  沿凸轮的轴线且其正向符合右手螺旋法则。

$OXYZ$  为固结在凸轮上的局部坐标系, 在初始位置 ( $\delta=0$ ),  $OXYZ$  与  $OX_1Y_1Z_1$  重合;  $OXYZ$  随凸轮一起以匀角速度  $\omega$  相对于固定坐标系  $OX_1Y_1Z_1$  作顺时针回转。

在任一时刻，滚子圆柱面上任一点  $P$  在固定坐标系  $OX_1Y_1Z$  中的座标为

$$\begin{cases} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{cases} = \begin{cases} h \\ b - l \cdot \cos\theta + r_0 \cdot \cos\psi \\ l \cdot \sin\theta + r_0 \cdot \sin\psi \end{cases} \quad (1)$$



在凸轮局部坐标系  $OXYZ$  中的座标为

$$\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} = [T] \begin{cases} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{cases} \quad (2)$$

其中

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\delta & -\sin\delta & 0 \\ \sin\delta & \cos\delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{为}$$

座标变换阵, 且有  $\det[T]=1$ ,

$$[T]^{-1} = [T]^H$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\delta & \sin\delta & 0 \\ -\sin\delta & \cos\delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

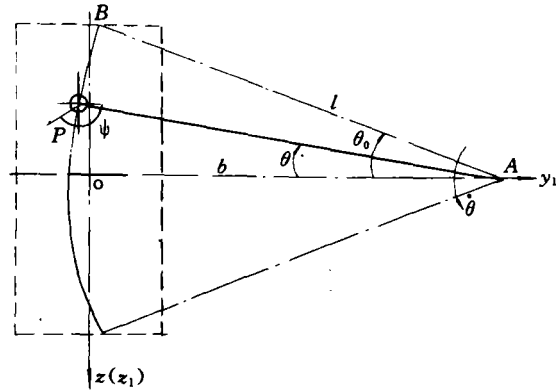


图 1

由于  $P$  点任意, 故在任一时刻 (即  $\delta, \theta$  一定), 式 (2) 为滚子在凸轮局部坐标系  $OXYZ$  中的柱面方程; 当  $\delta, \theta$  变化, 也即凸轮转动时, 式 (2) 为一关于  $\delta$  的柱面方程簇, 记作  $S$ 。显然, 圆柱凸轮的轮廓曲面即为柱面簇  $S$  的包络面  $\Sigma$ 。

根据微分几何的包络面原理,  $S$  的包络面  $\Sigma$  的方程为

$$\Sigma: \begin{cases} \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} = [T] \begin{cases} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{cases} \\ \det[J] = 0 \end{cases} \quad (3)$$

其中

$$[J] = \begin{bmatrix} x_{,h} & x_{,\delta} & x_{,\psi} \\ y_{,h} & y_{,\delta} & y_{,\psi} \\ z_{,h} & z_{,\delta} & z_{,\psi} \end{bmatrix} \quad (4)$$

“,” 表示求偏导, 下同。

$$\begin{cases} x_{,h} \\ y_{,h} \\ z_{,h} \end{cases} = [T] \begin{cases} x_{1,h} \\ y_{1,h} \\ z_{1,h} \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} x_{,\delta} \\ y_{,\delta} \\ z_{,\delta} \end{cases} = [T] \begin{cases} x_{1,\delta} \\ y_{1,\delta} \\ z_{1,\delta} \end{cases} + [T]_{,\delta} \begin{cases} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{cases}$$

$$[T]_{,\delta} = \begin{bmatrix} -\sin\delta & -\cos\delta & 0 \\ \cos\delta & -\sin\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因  
故

$$\begin{cases} x_{,\delta} \\ y_{,\delta} \\ z_{,\delta} \end{cases} = [T] \begin{cases} x_{1,\delta} - y_1 \\ y_{1,\delta} + x_1 \\ z_{1,\delta} \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} x_{,\psi} \\ y_{,\psi} \\ z_{,\psi} \end{cases} = [T] \begin{cases} x_{1,\psi} \\ y_{1,\psi} \\ z_{1,\psi} \end{cases} \quad (7)$$

$$\det[J] = \begin{vmatrix} x_{1,h} & x_{1,\delta} - y_1 & x_{1,\psi} \\ y_{1,h} & y_{1,\delta} + x_1 & y_{1,\psi} \\ z_{1,h} & z_{1,\delta} & z_{1,\psi} \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

由式(1),  $x_{1,h}=1, y_{1,h}=z_{1,h}=0, x_{1,\psi}=0$ , 代入上式, 经整理得:  $(y_{1,\delta}+x_1)z_{1,\psi}-z_{1,\delta} \cdot y_{1,\psi}=0$ , 再由式(1), 有

$$(h + l \cdot \sin\theta \cdot d\theta/d\delta)\cos\psi + l \cdot \cos\theta \cdot d\theta/d\delta \cdot \sin\psi = 0$$

令

$$\beta = \text{arctg}(l \cdot \cos\theta \cdot d\theta/d\delta / (h + l \cdot \sin\theta \cdot d\theta/d\delta)) \quad (9)$$

有

$$\cos(\psi - \beta) = 0$$

$$\psi - \beta = \pm \pi/2, \quad \psi = \beta \pm \pi/2$$

由此即得圆柱凸轮的轮廓曲面方程

$$\Sigma: \begin{cases} \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} = \begin{bmatrix} \cos\delta & -\sin\delta & 0 \\ \sin\delta & \cos\delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} h \\ b - l \cdot \cos\theta - M \cdot r_0 \cdot \sin\beta \\ l \cdot \sin\theta + M \cdot r_0 \cdot \cos\beta \end{cases} \\ \beta = \text{arctg}(l \cdot \cos\theta \cdot d\theta/d\delta / (h + l \cdot \sin\theta \cdot d\theta/d\delta)) \end{cases} \quad (10)$$

式中  $M = \pm 1$ , 各代表一个轮廓曲面。

## 2 圆柱凸轮的根切条件、滚子与凸轮的接触区域、接触线方向及凸轮圆柱面上的轮廓曲线

记  $\Sigma_+(M=1)$ ,  $\Sigma_-(M=-1)$  代表两个轮廓曲面, 由式(9)可知:

当  $h = -l \cdot \sin\theta \cdot d\theta/d\delta$  时,  $\beta = \pm \pi/2$ ,  $\psi = 0$  或  $\psi = \pi$ ;

若  $h < -l \cdot \sin\theta \cdot d\theta/d\delta$ ,  $\Sigma_+$  与  $\Sigma_-$  将相交, 轮廓曲面发生根切。

取  $h_0 = \max(-l \cdot \sin\theta \cdot d\theta/d\delta; \delta \in [0, 2\pi])$ ,  $h < h_0$  即为圆柱凸轮的根切条件。对正常切制的凸轮, 应满足  $h > h_0$ 。

将滚子圆柱面分成四个区域, 分别对应于  $\psi$  角的四个象限, 如图2.

对  $\Sigma_+$  轮廓面:

当  $d\theta/d\delta > 0$  (推程) 时,  $0 < \beta < \pi/2$ ,  $\pi/2 < \psi < \pi$ , 滚子与凸轮的接触区对应于  $\psi$  角的第二象限; 且  $h$  增加,  $\beta$  减小, 相应地  $\psi$  亦减小, 滚子表面的接触线方向为左旋。

当  $d\theta/d\delta < 0$  (回程) 时,  $-\pi/2 < \beta < 0$ ,  $0 < \psi < \pi/2$ , 滚子与凸轮的接触区对应于  $\psi$  角的第一象限; 且  $h$  增加,  $\beta$  增加, 相应地  $\psi$  亦增加, 滚子表面的接触线方向为右旋。

当  $d\theta/d\delta = 0$  (极限位置) 时,  $\beta = 0$ ,  $\psi = \pi/2$ , 滚子表面的接触线为直母线。

同理, 对  $\Sigma_-$  轮廓面:

当  $d\theta/d\delta > 0$  (推程) 时, 滚子与凸轮的接触区对应于  $\psi$  角的第四象限; 滚子表面的接触线方向为左旋。

当  $d\theta/d\delta < 0$  (回程) 时, 滚子与凸轮的接触区对应于  $\psi$  角的第三象限; 滚子表面的接触线方向为右旋。

当  $d\theta/d\delta = 0$  (极限位置) 时,  $\beta = 0$ ,  $\psi = -\pi/2$ , 滚子表面的接触线为直母线。

下面来确定凸轮任一圆柱面上的轮廓曲线。

实际上, 凸轮圆柱面上的轮廓曲线即为凸轮圆柱面与其轮廓曲面的交线。在半径为  $R$  的凸轮圆柱面上, 其轮廓曲线方程为

$$\begin{cases} \Sigma; \\ h^2 + (b - l \cdot \cos\theta - M \cdot r_0 \cdot \sin\beta)^2 = R^2 \end{cases} \quad (11)$$

在任一给定位置  $(\delta, \theta)$ , 有唯一的  $h^*$  满足

$$F(h) = h^2 + (b - l \cdot \cos\theta - M \cdot r_0 \cdot \sin\beta)^2 - R^2 = 0$$

将  $\beta = \arctg(l \cdot \cos\theta \cdot d\theta/d\delta / (h + l \cdot \sin\theta \cdot d\theta/d\delta))$  代入上式, 可得一关于  $h$  的四次代数方程。根据上面关于滚子与凸轮接触区及其接触线的讨论, 易知

$d\theta/d\delta > 0$  (推程) 时,  $h^* \in (h_0, h_1)$ , 其中

$$h_0 = \sqrt{R^2 - (b - l \cdot \cos\theta)^2}, \quad h_1 = \sqrt{R^2 - (b - l \cdot \cos\theta - M \cdot r_0)^2}, \text{ 且有 } F(h_0) \cdot F(h_1) < 0;$$

$d\theta/d\delta < 0$  (回程) 时,  $h^* \in (h_0, h_2)$ , 其中

$$h_0 = \sqrt{R^2 - (b - l \cdot \cos\theta)^2}, \quad h_2 = \sqrt{R^2 - (b - l \cdot \cos\theta + M \cdot r_0)^2}, \text{ 且有 } F(h_0) \cdot F(h_2) < 0;$$

$d\theta/d\delta = 0$  (极限位置) 时,  $h^* = \sqrt{R^2 - (b - l \cdot \cos\theta)^2}$ ;

采用二分法, 用计算机可快速迭代出  $h^*$ ; 将  $h^*$  代入  $\Sigma$ , 即可确定对应于位置  $(\delta, \theta)$  的轮廓曲线点座标。

### 3 凸轮的压力角及按许用压力角设计的滚子最小接触高度

滚子与凸轮在任一接触点处的法矢量

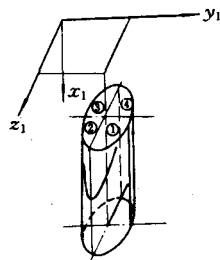


图 2

$$N = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ x_{1,h} & y_{1,h} & z_{1,h} \\ x_{1,\delta} & y_{1,\delta} & z_{1,\delta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ x_{1,h} & y_{1,h} & z_{1,h} \\ x_{1,\delta} - y_1 & y_{1,\delta} + x_1 & z_{1,\delta} \end{vmatrix} = n_{x_1}X_1 + n_{y_1}Y_1 + n_{z_1}Z_1 \quad (12)$$

式中,

$$\begin{aligned} n_{x_1} &= y_{1,h} \cdot z_{1,\delta} - z_{1,h}(y_{1,\delta} + x_1) \\ n_{y_1} &= z_{1,h}(x_{1,\delta} - y_1) - x_{1,h} \cdot z_{1,\delta} \\ n_{z_1} &= x_{1,h}(y_{1,\delta} + x_1) - y_{1,h}(x_{1,\delta} - y_1) \end{aligned}$$

注意到在  $\Sigma$  中,  $\psi$  是  $\delta$ 、 $h$  的函数, 故

$$y_{1,h} = y_{1,\psi} \cdot \psi_{,h}, \quad z_{1,h} = z_{1,\psi} \cdot \psi_{,h}, \quad x_{1,h} = 1, \quad x_{1,\delta} = 0$$

代入上述三式, 由式 (8) 有

$$n_{z_1} = \psi_{,h}(y_{1,\psi} \cdot z_{1,\delta} - z_{1,\psi}(y_{1,\delta} + x_1)) = 0$$

此式表明: 接触点处的法矢量总是平行于  $OY_1Z_1$  平面, 也即平行于摆杆的运动平面。

$$n_{y_1} = -(z_{1,\psi} \cdot \psi_{,h} \cdot y_1 + z_{1,\delta})$$

$$n_{x_1} = y_{1,\delta} + x_1 + y_{1,\psi} \cdot \psi_{,h} \cdot y_1$$

将式(8)中的  $z_{1,\psi}$ ,  $-y_{1,\psi}$  分别用  $n_{y_1}$ ,  $n_{x_1}$  替换, 有

$$\begin{aligned} &-(y_{1,\delta} + x_1)(z_{1,\psi} \cdot \psi_{,h} \cdot y_1 + z_{1,\delta}) + z_{1,\delta}(y_{1,\delta} + x_1 + y_{1,\psi} \cdot \psi_{,h} \cdot y_1) \\ &= -\psi_{,h}y_1((y_{1,\delta} + x_1)z_{1,\psi} - z_{1,\delta} \cdot y_{1,\psi}) = 0 \end{aligned}$$

故  $N$  平行于矢量  $\{0 \ z_{1,\psi} - y_{1,\psi}\}$ , 由

$z_{1,\psi} = r_0 \cdot \cos\psi$ ,  $-y_{1,\psi} = r_0 \cdot \sin\psi$ , 故单位法矢量

$$N_\delta = \{0 \ \cos\psi \ \sin\psi\} \quad (13)$$

此式表明: 滚子与凸轮任一接触点处的法矢量必通过滚子中心。

滚子中心的单位速度矢量

$$V_\delta = \{0 \ \sin\theta \ \cos\theta\} \quad (14)$$

令  $\alpha$  为  $N_\delta$  与  $V_\delta$  间的夹角, 故有

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \{0 \ \cos\psi \ \sin\psi\} \cdot \{0 \ \sin\theta \ \cos\theta\}^H = \sin(\psi + \theta) \\ &= \sin(\pm \pi/2 + \beta + \theta) = \pm \cos(\beta + \theta) \end{aligned} \quad (15)$$

于是根据压力角的定义, 有

$$\alpha = |\beta + \theta| \quad (16)$$

此即摆动滚子从动件圆柱凸轮压力角计算公式; 其中  $\beta$  (见式(9))、 $\theta$  均为代数值。

假定凸轮的许用压力角为  $[\alpha]$ , 由  $\alpha \leq [\alpha]$  有

$$-[\alpha] \leq \beta + \theta \leq [\alpha], \text{ 即}$$

$$-\text{tg}[\alpha] \leq \text{tg}(\beta + \theta) \leq \text{tg}[\alpha]$$

而  $\text{tg}(\beta + \theta) = (\text{tg}\beta + \text{tg}\theta)/(1 - \text{tg}\beta\text{tg}\theta) = (l\text{sec}\theta \cdot d\theta/d\delta + h\text{tg}\theta)/h$

故有

$$\begin{cases} h \geq (l\text{sec}\theta \cdot d\theta/d\delta)/(\text{tg}[\alpha] - \text{tg}\theta) \\ h \geq -(l\text{sec}\theta \cdot d\theta/d\delta)/(\text{tg}[\alpha] + \text{tg}\theta) \end{cases} \quad (17)$$

由于一般总有  $h > 0$ ,  $|\theta| < [\alpha]$ , 且凸轮在升程和回程有不同的压力角要求, 若分别

记作 $[\alpha_1]$ ,  $[\alpha_2]$ , 令

$$h_{1\min} = \max((l \sec \theta \cdot d\theta/d\delta) / (\operatorname{tg}[\alpha_1] - \operatorname{tg}\theta); \quad d\theta/d\delta > 0)$$

$$h_{2\min} = \max(- (l \sec \theta \cdot d\theta/d\delta) / (\operatorname{tg}[\alpha_2] + \operatorname{tg}\theta); \quad d\theta/d\delta < 0)$$

则按许用压力角设计的滚子最小接触高度为

$$h_{\min} = \max(h_{1\min}, h_{2\min}) \quad (18)$$

## 4 结 论

本文根据微分几何的包络原理所建立的摆动滚子从动件圆柱凸轮几何设计的解析理论, 为精确设计凸轮的轮廓、准确认识其运动特性奠定了基础。本文所导出的凸轮压力角公式、凸轮根切条件、滚子的最小接触高度及有关滚子与凸轮的接触区域、接触线方向的定性讨论, 不仅有理论意义, 而且有实用价值, 可供设计者参考。

此外, 本文的研究方法亦可方便地推广到其它空间凸轮的研究中去, 限于篇幅, 这里不再赘述。

## 参 考 文 献

- 1 华大年, 唐之伟. 机构分析与设计. 纺织工业出版社, 1985
- 2 管荣法, 汤从心. 凸轮与凸轮机构基础. 国防工业出版社, 1985
- 3 吴大任. 微分几何. 人民教育出版社, 1959

# Analytical Design Method for the Cylindrical Cam with Oscillating Roller Follower

Li Dongcheng Yang Angyue

(Department of Precision Machinery and Instrument)

## Abstract

In this paper, a contour surface equation has been developed for the cylindrical cam with oscillating roller follower by utilizing enveloping theorem of differential geometry. Based on it, some essential problems, such as the condition of cylindrical cam's undercutting, the contact zone and actual contact curves between the roller and cam, etc., have been discussed in detail, and the formula of pressure angle as well as the minimum contact height of rollers has been derived too. All of these make the analytical design method for the cam more perfect.

**Key words** cylindrical cam, oscillating roller follower, enveloping theorem, contour surface