国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第15卷第2期 1993年6月 Vol. 15 No. 2

导弹飞行试验外测系统误差的估计*

蔡 洪 贾沛然
（自动控制系）

摘 要 在导弹飞行试验中，遥外测数据是进行精度和可靠性分析的依据。通常假定外测误差服从零均值正态分布，而在实际测量中，外测参数有可能带有系统误差，它的存在对飞行轨道和落点信息的获取都具有不利的影响。在一定的模型假设下，本文获得了外测系统误差的估计，并对一些仿真结果进行了初步分析。

关键词 导弹飞行试验，外测系统，系统误差，导弹
分类号 V556.1

在导弹精度和可靠性分析中，弹上制导系统仪表误差（常称为制导工具误差）是极其重要的分析对象，正因为如此，人们试图通过飞行试验对制导工具误差进行估计，其基本思想是以遥外测数据进行比较，建立各误差系数的线性模型，通常遥测模型为

$$W_r(t) = W(t) + S(t)\delta C \tag{1}$$

式中 $W_r(t)$是 t 时刻遥测视速度和视位置组成的向量；$W(t)$为 t 时刻真实的视速度和视位置向量；δC 是制导工具误差向量；$S(t)$是 t 时刻弹道提供的制导系统的环境矩阵。

外测模型可描述为

$$W_o(t) = W(t) + \varepsilon(t) \tag{2}$$

式中 $W_o(t)$为外测向量；$\varepsilon(t)$为外测误差。

一般情况下，总是认为外测数据精度较高，因此用作比较标准，而将遥外测数据之差作为观测量，建立各误差系数的线性模型，将(1)与(2)相减并记

$$\delta W(t) = W_r(t) - W_o(t) \tag{3}$$

得

$$\delta W(t) = S(t)\delta C - \varepsilon(t) \tag{4}$$

$\{-\varepsilon(t)\}$仍为一正态随机序列，不妨仍以 $\varepsilon(t)$表示，即

$$\delta W(t) = S(t)\delta C + \varepsilon(t) \tag{5}$$

这就是通常关于制导工具误差系数的线性模型，在给出 $\varepsilon(t)$的统计特性时，人们试图获得 δC 的估计，然而，由于 δC 的项数较多使得模型具有严重的复共线性，经典的估计（最小二乘方等）无法获得可信的估值结果，近代各种线性估计的改进方法虽然比经典估计

* 1991年12月3日收稿

性能有所改进，但就制导工具误差而言，还未获得令人满意的结果。

在精度和可靠性分析中，δC 的估计是一个严重的障碍，因制导工具误差精度折合方法，避免了对 δC 的估计，得到了人们的关注。所谓精度折合指的是，对某型号导弹，将其某些特殊弹道（低弹道、高弹道、提前关机弹道等）的试验信息折合成正常弹道的信息，从而对正常弹道进行精度分析。在此过程中，δC 是联系特殊弹道与正常弹道的“信息纽带”。

尽管(5)中很难获得 δC 的可信的估计，但此式仍是导弹精度分析中重要的误差模型，它可以建立特殊弹道与正常弹道的一种信息关系，但这种关系受随机因素的影响，主要表现在模型中的 $\varepsilon(t)$，具体说来，如果 $\varepsilon(t)$ 中具有系统误差 b，而又不给以扣除，将会降低弹道信息转换的可信度。从数学方法上看，b 可以与 δC 一起进行估计，但这在实际应用中是不可行的。本文的目的就是将 b 与 δC 分离，然后对 b 进行估计。

1 模型及其假设

对于某型号导弹，误差模型可以表述如下，

$$\delta W(t) = S(t)\delta C + b + \eta(t) \tag{6}$$

对于上述模型，$\delta W(t)$ 为 6×1 的向量，由试验遥外测系统提供；$S(t)$ 为 6×30 的环境函数矩阵，由标准弹道给出；δC 为 30×1 的工具误差向量；b 为 6×1 的外测系统误差向量；$\eta(t)$ 为 6×1 的随机输入向量；在本文的讨论中，δC、b、$\eta(t)$ 符合如下假设：

(1) δC 在整个制导过程中为不变的向量；(2) b 在整个外测过程中为常向量；(3) $\eta(t)$ 为零均值正态不相关向量序列，且

$$E[\eta(t)] = 0$$

$$E[\eta(t)\eta'(t)] = Q(t)，(Q(t) \text{ 为已知的协方差矩阵})$$

$$E[\eta(t)\eta'(\tau)] = 0，t \neq \tau$$

2 外测系统误差 b 的估计

对于模型(6)，δC 与 b 同时出现，要获得 b 的估计，关键在于如何消去 δC，而得出关于 b 的估计模型。为此，对模型进行扩充，记

$$\delta W = \begin{bmatrix} \delta W(t_1) \\ \vdots \\ \delta W(t_n) \end{bmatrix}_{6n\times1}; \quad S = \begin{bmatrix} S(t_1) \\ \vdots \\ S(t_n) \end{bmatrix}_{6n\times30}$$

$$J = \begin{bmatrix} I \\ \vdots \\ I \end{bmatrix}_{6n\times6}; \quad \eta = \begin{bmatrix} \eta(t_1) \\ \vdots \\ \eta(t_n) \end{bmatrix}_{6n\times1}$$

式中 I 为 6×6 的单位矩阵。

于是得模型

$$\delta W = S\delta C + Jb + \eta \tag{7}$$

式中 $E[\eta] = 0$；$\mathrm{cov}[\eta] = Q = \mathrm{diag}(Q(t_1),\cdots,Q(t_n))$

Q 为 $6n\times6n$ 的对称正定矩阵，可分解为 $Q=Q^{1/2}Q^{1/2}$

作线性变换 $\delta W=Q^{1/2}Y$ 即有

$$Y = Q^{-1/2}\delta W = Q^{-1/2}S\delta C + Q^{-1/2}Jb + Q^{-1/2}\eta$$

记 $$V = Q^{-1/2}\eta;\ S_q = Q^{-1/2}S$$

则模型变成

$$Y = S_q\delta C + Q^{-1/2}Jb + V \tag{8}$$

式中 $$E[V] = 0;\ \mathrm{cov}[V] = Q^{-1/2}\mathrm{cov}[\eta]Q^{-1/2} = I$$

为了消去 δC，下面给出一个定理。

定理 对于 $m\times n(m>n)$的矩阵 A，如果 $\mathrm{Rank}[A]=r$，则存在$(m-r)\times m$ 的矩阵 P 使得 (1) $PA=0$；(2) $PP'=I$

证明 在 m 维向量空间中，由于矩阵 A 的秩为 r，则 A 的各列张成一 r 维子空间，设这 r 维子空间的一组单位正交基为 u_1，…，u_r，它们为 m 维列向量，满足如下关系

$$u_i'u_j = \begin{cases}1 & i = j \\ 0 & i \neq j\end{cases} \quad i,j = 1,\cdots,r$$

对于 r 维子空间的一组单位正交基，可以扩充为整个 m 维空间的一组单位正交基 $u_1,\cdots$，u_r、u_{r+1}，…，u_m. 作矩阵

$$P = (u_{r+1},\cdots,u_m),\quad U_r = (u_1,\cdots,u_r)$$

P 为$(m-r)\times$维的矩阵，U_r 为 $m\times r$ 维的矩阵，显然有

$$PU_r = 0;PP' = I$$

又，A 的各列是 u_1，…，u_r 的线性组合，则有

$$A = U_rD \qquad (D\text{ 为 } r\times n \text{ 的矩阵})$$

于是. $$PA = PU_rD = 0$$

可见 P 满足(1)、(2). 定理证毕。

定理中的 P 并不是唯一的。下面介绍求取 P 的一种具体方法。

对于矩阵 A，作线性方程组

$$A'X = 0$$

A' 为 $n\times m(n<m)$的矩阵，X 为 $m\times 1$ 的待解向量。由于 A'的秩为 r，则对方程组进行初等变换可得等效的方程组

$$GX = 0$$

式中 G 为 $r\times m$ 的满秩矩阵。方程组具有 m 个未知量，只有 r 个不相关的方程。于是选取 r 个 X 的分量作为未知量(可用主元选取法)，而将其它 $m-r$ 个 X 的分量分别取已知量代入，获得 $m-r$ 个互不相关的解，然后用 Gram－Schmidt 正交化方法将各解向量施行单位正交化得解向量 X_1，…，X_{m-r}，即有

$$A'(X_1,\cdots,X_{m-r}) = 0$$

记 $$P' = (X_1,\cdots,X_{m-r})$$

则 $$A'P' = 0 \quad \text{或} \quad PA = 0$$

由于解向量是单位正交化的，有

$$PP' = I$$

可见 P 即为所求。

回到模型(8)，我们知道，S 为 $6n\times 30$ 的矩阵，只要取 $n\geqslant 6$ 即有 $6n>30$，使 S 满足定理中矩阵 A 的条件，计算出 S 的秩 $r=\mathrm{Rank}[S]$，按前述方法求得满足 $PS=0$；$PP'=I$ 的变换矩阵 P，它是 $(6n-r)\times 6n$ 维的。将(8)左乘 P 得

$$PY = PQ^{-1/2}Jb + PV \tag{9}$$

PV 仍为正态随机向量，记 $\Gamma=PV$；$Z=PY$；$H=PQ^{-1/2}J$，模型变为

$$Z = Hb + \Gamma \tag{10}$$

式中 Z 为 $(6n-r)\times 1$ 的向量，H 为 $(6n-r)\times 6$ 的矩阵，Γ 为 $(6n-r)\times 1$ 的随机向量，且 $E[\Gamma]=0$，$\mathrm{cov}[\Gamma]=I$. 于是我们获得了外测系统误差与 δC 不相关的模型，为了得到 b 的可信的估计，需要充分利用关于 b 的信息，我们看到，基于不同的数据可以得到多个类似于(10)的关于 b 的随机输入互不相关的模型，不妨把多个模型（如 m 个）写在一起成为紧凑的形式

$$\overline{Z}b = \overline{H}b + \overline{\Gamma} \tag{11}$$

式其中

$$\overline{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_m \end{bmatrix};\quad \overline{H} = \begin{bmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_n \end{bmatrix};\quad \overline{\Gamma} = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \vdots \\ \Gamma_n \end{bmatrix}$$

记 $$N = \sum_i (6n - r_i)$$

则 b 的估计模型(11)中，$\overline{Z}$ 为 $N\times 1$ 的观测向量；$\overline{H}$ 为 $N\times 6$ 的矩阵；$\overline{\Gamma}$ 为 $N\times 1$ 的正态随机向量，且 $\hat{E}[\overline{\Gamma}]=0$，cov $[\overline{\Gamma}]$ $=I$. 于是 b 的最小二乘方(LS)估计为

$$b_{LS} = (\overline{H}'\overline{H})^{-1}\overline{H}'\overline{Z} \tag{12}$$

估计的协方差阵为

$$\mathrm{cov}[b_{LS}] = (\overline{H}'\overline{H})^{-1} \tag{13}$$

(12)为 b 的无偏最小方差估计，基于(11)还可以获得在某些准则下（如 MSE）性能优于 LS 估计的估计，如岭估计、主成分估计、James－Stain 估计、广义压缩估计等，在此不作讨论。

3 外测系统误差估计的一些仿真结果及分析

我们用计算机产生伪随机数的方法模拟随机模型

$$\delta W(t) = S(t)\delta C + b + \eta(t) \tag{14}$$

某型号导弹主动段运行时间为 270 秒，仿真时取 0.5 秒作为时间单位，对于每一个时间 t，$S(t)$是由标准弹道提供的 6×30 的环境函数矩阵，$\{\eta(t)\}$是随机产生的零均值正态不相关随机向量序列，其协方差是给定的

$$\mathrm{cov}[\eta(t)] = \mathrm{diag}(0.0004\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2,\ 0.0004\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2,\ 0.0004\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2,\ 100\mathrm{m}^2,\ 100\mathrm{m}^2,\ 100\mathrm{m}^2)$$

也就是说产生随机数时，速度的标准方差为 0.02m/s；位置的标准方差为 10m；δC 与 b 在全过程中为给定常向量。于是我们产生了 540 组数据，抛弃开始 20 秒的 40 组数据和最后 5 秒的 10 组数据，将剩下的 490 组数据按时间顺序分为 7 批，每批 70 组数据，在

每批中顺序取点得扩充的模型

$$\begin{bmatrix}\delta W_{1i}\\ \vdots \\ \delta W_{7i}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}S_{1i}\\ \vdots \\ S_{7i}\end{bmatrix}\delta C + \begin{bmatrix}J\\ \vdots \\ J\end{bmatrix} b + \begin{bmatrix}\eta_{1i}\\ \vdots \\ \eta_{7i}\end{bmatrix} \tag{15}$$

记为
$$\overline{\delta W}_i = \overline{S}_i \delta C + Jb + \overline{\eta}_i;\ i = 1,2,\cdots,70$$

这样分批取点扩充模型是为了减弱扩充后系数矩阵的相关性，因为这样分批取点使得S_{1i}，…，S_{7i}相邻两项的时间间隔为 70 个单位即 35 秒。时间间隔越大，系数相关性越弱，这是不难理解的。

对于(15)所描述的 70 个模型，将每个模型用第三节中的方法进行变换，获得关于 b 的形如(10)的模型，然后将其组合起来得 b 的估计模型形如(11)，从而得到 b 的估计。

下面给出 b 的估计及其与真值的对比

表 1　b 的估计及其与真值的对比(一)

	vx(m/s)	vy(m/s)	vz(m/s)	x(m)	y(m)	z(m)
b 的真值	1.0	2.0	0.8	100	200	70
b_{LS}	1.013	2.004	0.762	100.381	201.501	69.355
$\Delta b = b_{LS} - b$	0.013	0.004	−0.038	0.381	1.501	−0.445

在另一组 b 的真值和随机数情况下有如下结果

表 2　b 的估计及其与真值的对比(二)

	vx(m/s)	vy(m/s)	vz(m/s)	x(m)	y(m)	z(m)
b 的真值	0.3	0.5	0.2	15	20	10
b_{LS}	0.283	0.503	0.149	14.145	20.453	8.651
$\Delta b = b_{LS} - b$	−0.017	0.003	−0.051	−0.855	0.453	−1.349

从上面的结果可以看出，对于不同的参数真值，其估计的偏差量级相同，这些结果初步表明，本文对外测系统误差进行估计是可行的。

如果外测系统误差在全过程中是分段常值，亦可用本文的方法对其进行估计。

进一步的分析可以表明，位置估计比速度估计的相对精度要高，其原因至少有二，其一是由环境函数的性质决定的；其二是因为两者的量级差别较大而造成的。为此，需要采取一些措施，对参数进行变换，使其在同一量级或量级差别不大的情况下进行估计。这是计算方法的问题。

另外，如果增大估计模型的样本容量，可以提高估计精度，但这是有限的。因为对于实际试验，随机输入并非总满足正态不相关的假设，特别是采点过于密集时此假设更难满足。

总之，在外测系统误差估计方面还有不少进一步的工作可做，主要是放宽模型假设而对其进行估计，这方面每走一步都将遇到不少困难，但却是具有重要现实意义的。

参 考 文 献

1 MARK A, STURZA. Navigation System Interity Monitoring Using Redundant. Measurements NAVIGATION, 1988-89: 35(1)

2 张金槐等. 飞行试验统计学（下册）. 国防科技大学出版社, 1984

3 陈希孺等. 近代实用回归分析. 广西人民出版社, 1984

The Estimation of Exterior Ballistic Measuring System Error for Missile Flight Test

Cai Hong　Jia Peiran

(Department of Automatic Control)

Abstract

For missile flight test, telemetering data and exterior ballistic measuring data are the basis of precision and reliability analysis. Usually, we assume that exterior ballistic measuring error has normal distribution with zero mean. But during the real measuring, it is possible for exterior ballistic measuring parameters to cause system error. It has bad influence on the information obtained from flight trajectory and fall point. With the given model hypothesis, the estimation of exterior ballistic measuring system error is obtained in this paper. Futher more, some simulating results and their preliminary analysis are given.

Key words　missile flight test, exterior ballistic measuring system, system error, missile