国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第15卷第2期 1993年6月 Vol. 15 No. 2

一类分段线性费用网络流问题*

谢 政
（系统工程与应用数学系）

摘 要 本文通过把一类分段线性费用网络流问题化成线性费用网络流问题，给出了求解这类分段线性费用网络流问题的算法。

关键词 网络流，分段线性费用网络，可行流，最小费用流
分类号 O223

在运输问题中，常常会遇到这样一类问题：有些货物不能与其它货物混装在同一个货箱中（例如，毒品与食品，军品与民品，等等），即是说，这些货物无论是否装满一个货箱，均按一个货箱的运价收费。这样，运费就是一个分段线性函数。如何把这样一批货物从发点（产地）运到收点（销地），使总运费最小？这里，我们假设所有货箱的规格是相同的。

运输网络可以用一个有向图 $D=(V,A)$表示，$V=\{1,2,\cdots,n\}$为顶点集，s、$t\in V$，分别为发点和收点，$A=\{(i,j)|i,j\in V\}$为弧集。上述问题就是 D 上的一个分段线性费用网络流问题，简称为问题（I）：

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}(x_{ij})$$

$$\sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = \begin{cases} v, i = s \\ 0, i \neq s、t, i \in V \\ -v, i = t \end{cases}$$

$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant a_{ij}, (i,j) \in A$$

式中对一切$(i,j)\in A$，有

$$a_{ij} = b \cdot r_{ij}$$

$$c_{ij}(x_{ij}) = \begin{cases} 0、 & 若\ x_{ij} = 0 \\ pd_{ij}, 若 (p-1)\cdot b < x_{ij} \leqslant p\cdot b, p = 1,\cdots,r_{ij} \end{cases}$$

这里 v、b 和 r_{ij}均为正整数，d_{ij}为非负实数。

把问题(I)中流值 v 改为 $\bar{v}=\lceil v/b\rceil \cdot b$(这里$\lceil v/b\rceil$表示不小于 v/b 的最小整数)，而费用函数和约束条件都不变，得到 D 上的另一个分段线性费用网络流问题（Ⅱ）：

* 1992年2月27日收稿

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}(x_{ij})$$

$$\sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = \begin{cases} \bar{v}, i = s \\ 0, i \neq s、t, i \in V \\ -\bar{v}, i = t \end{cases}$$

$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant a_{ij}, (i,j) \in A$$

定理 1 若问题（Ⅱ）有可行流，则存在最小费用流 $f^* = \{x_{ij}^* \mid (i,j)\in A\}$满足

$$x_{ij}^* = b \cdot y_{ij}^*，对一切(i,j) \in A \tag{1}$$

其中 y_{ij}^*为非负整数。

证明 设问题（Ⅱ）有最小费用流 $f=\{x_{ij} \mid (i,j)\in A\}$,其中 $x_{ij}=b\cdot y_{ij}+w_{ij}$,$0\leqslant w_{ij}<b$,$y_{ij}$和 w_{ij}均为非负整数,且至少有一个 $w_{i_0j_0}>0$.

下面我们构造满足(1)式的最小费用流,给出算法如下:

Step0 令

$$A_0 = \{(i,j) \mid w_{ij} > 0,\ (i,j) \in A\}$$
$$V_0 = \{i \mid (i,j) \in A_0 \text{ 或} (j,i) \in A_0\}$$

得到网络 $D_0=(V_0,A_0)$,其中 D_0 中弧(i,j)的权为 $\overline{w}_{ij}=w_{ij}$. 令 $D_1=D_0$,$A_1=A_0$.

Step1 根据 $D_1=(V_1,A_1)$构造网络 $\hat{D}=(\hat{V},\hat{A})$：$\hat{V}=V_1$，并且，当 $(i,j)\in A_1$ 时，有弧 (i,j)、$(j,i)\in\hat{A}$，其中 (i,j) 的权 $\hat{w}_{ij}=b-\overline{w}_{ij}$，并标以“$+(i,j)$”；$(j,i)$ 的权 $\hat{w}_{ji}=\overline{w}_{ij}$，并标以“$-(j,i)$”.

Step2 在 $\hat{D}$ 中找不同时含“$+(i,j)$”和“$-(j,i)$”的回路 C，设 $\delta=\min\limits_{(i,j)\in C}\{w_{ij}\}$，并且调整 D_0 的弧权：

(1) 把与 C 中标以“$-$”号的弧 (i,j) 相对应的 D_0 中弧 (j,i) 的权 $\overline{w}_{ji}$改为 $\overline{w}_{ji}-\delta$；

(2) 把与 C 中标以“$+$”号的弧 (i,j) 相对应的 D_0 中弧 (i,j) 的权 $\overline{w}_{ij}$改为 $\overline{w}_{ij}+\delta$；

(3) D_0 中其它弧的权不变。

令

$$A_1 = \{(i,j) \mid 0 < \overline{w}_{ij} < b, (i,j) \in A_0\}$$
$$V_1 = \{i \mid (i,j) \in A_1 \text{ 或} (j,i) \in A_1\}$$

若 $A_1=\phi$，转 Step3；否则转 Step1.

Step3 结束。令

$$s_{ij}^* = \begin{cases} b \cdot y_{ij}, & (i,j) \in A\backslash A_0 \\ b \cdot y_{ij} + \overline{w}_{ij}, & (i,j) \in A_0 \end{cases}$$

则 $f^*=\{x_{ij}^* \mid (i,j)\in A\}$ 是问题（Ⅱ）的可行流，且满足（1）式。

现在证明算法的正确性及有限性。

(a) 由 f^*的构造知，f^*是问题（Ⅱ）的可行流，且 f^*的费用 $c(f^*)$不大于算法的初始流 f 的费用 $c(f)$，所以 f^*是问题（Ⅱ）的最小费用流。

(b) 若 $\bar{f}$ 是问题（Ⅱ）的可行流，但不满足（1）式，则由 $\bar{f}$ 产生的网络 $\hat{D}$ 必存在不

同时含“$+(i,j)$”和“$-(j,i)$”的回路。事实上，由$\bar{f}$产生的网络D_1的弧集$A_1\neq\phi$，对一切$i\in V_1$，定义

$$I_i=\{j\mid (j,i)\in A_1\},\quad O_i=\{j\mid (i,j)\in A_1\},$$

$$S=\{i\mid I_i=\phi, i\in V_1\},\quad T=\{i\mid O_i=\phi, i\in V_1\}$$

当$i\in S$时，则$\sum\limits_{j\in O_i}\overline{w}_{ij}=l_i\cdot b$，$l_i$为正整数，所以由$0<\overline{w}_{ij}<b$知$|O_i|\geqslant 2$；当$i\in T$时，同理有$|I_i|\geqslant 2$；当$i\in V_1\backslash S\backslash T$时，$|O_i|\geqslant 1$，$|I_i|\geqslant 1$. 因此，$D_1$的基础图$G_1$的最小次不小于2，于是$G_1$中存在圈，即$D_1$中存在圈，从而$\hat{D}$中必存在不同时含“$+(i,j)$”和“$-(j,i)$”的回路。

(c) 在算法中，每找出$\hat{D}$中一个不同时含“$+(i,j)$”和“$-(j,i)$”的回路，调整D_0的弧权，至少使D_0的一条弧的权由$0<\overline{w}_{ij}<b$变成$\overline{w}_{ij}=0$或者$\overline{w}_{ij}=b$，而D_0的弧数是有限的，故算法必在有限步终止。

由 (a)、(b)、(c) 知算法正确，故定理1得证。

引理1 由问题(Ⅰ)的最小费用流可以得到问题(Ⅱ)的最小费用流，反之亦然，并且问题(Ⅰ)和(Ⅱ)的最小费用流的费用相等。

证明 若$\bar{v}=v$，则引理1显然成立。下设$\bar{v}>v$，则$0<\bar{v}-v<b$.

设$f_1=\{x_{ij}^{(1)}\mid (i,j)\in A\}$和$f_2=\{x_{ij}^{(2)}\mid (i,j)\in A\}$分别是问题(Ⅰ)和(Ⅱ)的最小费用流。由定理1可设

$$x_{ij}^{(2)}=b\cdot y_{ij}^{(2)},\ y_{ij}\geqslant 0\text{ 整数},\text{对一切}(i,j)\in A$$

因$\bar{v}>0$，故D中存在一条$s-t$有向路P满足

$$y_{ij}^{(2)}>0,\ \text{对一切}(i,j)\in P$$

调整P上f_2的弧流量

$$\bar{x}_{ij}^{(2)}=\begin{cases}x_{ij}^{(2)}-\bar{v}+v, & \text{若}(i,j)\in P\\ x_{ij}^{(2)}, & \text{若}(i,j)\in A\backslash P\end{cases}$$

得到问题(Ⅰ)的可行流$\bar{f}_2=\{\bar{x}_{ij}^{(2)}\mid (i,j)\in A\}$，且

$$c(f_1)\leqslant c(\bar{f}_2)=c(f_2) \tag{2}$$

对于f_1，设　$x_{ij}^{(1)}=b\cdot y_{ij}^{(1)}+w_{ij}$，对一切$(i,j)\in A$

其中$y_{ij}^{(1)}$为非负整数，$0\leqslant w_{ij}<b$. 令

$$\hat{A}=\{(i,j)\mid x_{ij}^{(1)}>0,\ (i,j)\in A\}$$

因$v>0$，故$\hat{A}\neq\phi$，记网络D的由$\hat{A}$导出的子网络为$\hat{D}$，$\hat{D}$中弧(i,j)的容量定义为

$$\hat{a}_{ij}=\begin{cases}x_{ij}^{(1)}, & \text{当 } w_{ij}=0\text{ 时}\\ (y_{ij}^{(1)}+1)b, & \text{当 } w_{ij}\neq 0\text{ 时}\end{cases}$$

由整数最大流定理[1]知，$\hat{D}$的最大流的值$\hat{v}$是b的正整数倍。又因f_1是$\hat{D}$的可行流，流值为v，故$\hat{v}\geqslant v$，于是

$$\hat{v}\geqslant\bar{v}=\lceil v/b\rceil\cdot b$$

所以，从零流开始，利用最大流标号法[1]可求出$\hat{D}$的流值为$\bar{v}$的可行流$\hat{f}=\{\hat{x}_{ij}\mid (i,j)\in\hat{A}\}$，这里$\hat{x}_{ij}=b\cdot y_{ij}$，$y_{ij}$为非负整数，对一切$(i,j)\in\hat{A}$. 令

$$\overline{x}_{ij}=\begin{cases}\hat{x}_{ij},若(i,j)\in\hat{A}\\0,若(i,j)\in A\backslash\hat{A}\end{cases}$$

则 $\overline{f}_1=\{\overline{x}_{ij}\mid(i,j)\in A\}$ 是问题（Ⅱ）的可行流，且

$$c(f_2)\leqslant c(\overline{f}_1)=c(f_1) \tag{3}$$

由（2）、（3）两式知 $c(f_1)=c(f_2)$，故引理 1 成立。

再考虑 $D=(V,A)$ 上最小费用流问题（Ⅲ）：

$$\min\sum_{(i,j)\in A}d_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_j x_{ij}-\sum_j x_{ji}=\begin{cases}\lceil v/b\rceil,i=s\\0\quad,i\neq s、t,i\in V\\-\lceil v/b\rceil,i=t\end{cases}$$

$$0\leqslant x_{ij}\leqslant r_{ij},(i,j)\in A$$

这里的 v、b、r_{ij}、d_{ij}同问题（Ⅰ）一致。

引理 2 若 $f_0=\{x_{ij}^{(0)}\mid(i,j)\in A\}$ 是问题（Ⅲ）的最小费用流，令

$$x_{ij}=bx_{ij}^{(0)},对一切(i,j)\in A$$

则 $f^*=\{x_{ij}^*\mid(i,j)\in A\}$ 是问题（Ⅱ）的最小费用流，反之亦然；并且问题（Ⅱ）和（Ⅲ）的最小费用流的费用相等。

证明 首先，由问题（Ⅱ）与（Ⅲ）之间的关系知，$f=\{x_{ij}\mid(i,j)\in A\}$ 是问题（Ⅲ）的整数可行流的充要条件是

$$\overline{f}=\{\overline{x}_{ij}\mid\overline{x}_{ij}=b\cdot x_{ij},\quad x_{ij}为非负整数,(i,j)\in A\}$$

为问题（Ⅱ）的可行流。并且 $c(f)=c(\overline{f})$，即

$$\sum_{(i,j)\in A}d_{ij}x_{ij}=\sum_{\substack{(i,j)\in A\\ \overline{x}_{ij}=bx_{ij}}}c_{ij}(\overline{x}_{ij})$$

故问题（Ⅲ）的最小费用

$$\min\sum_{(i,j)\in A}d_{ij}x_{ij}=\min\sum_{\substack{(i,j)\in A\\ \overline{x}_{ij}=b\cdot x_{ij}}}c_{ij}(\overline{x}_{ij}) \tag{4}$$

根据定理 1，问题（Ⅱ）的最小费用

$$\min\sum_{(i,j)\in A}c_{ij}(\overline{x}_{ij})=\min\sum_{\substack{(i,j)\in A\\ \overline{x}_{ij}=b\cdot x_{ij}}}c_{ij}(\overline{x}_{ij}) \tag{5}$$

由（4）、（5）两式知，问题（Ⅱ）的最小费用等于问题（Ⅲ）的最小费用，立即推出引理 2.

由引理 1、2 得到

定理 2 若问题（Ⅲ）无可行流，则问题（Ⅰ）亦无可行流；若 $f_0=\{x_{ij}^{(0)}\mid(i,j)\in A\}$ 是问题（Ⅲ）的最小费用流，在网络 D 中任取一条 $s-t$ 有向路 P：

$$x_{ij}^{(0)}>0,\quad 对一切(i,j)\in P$$

则 $f^*=\{x_{ij}^*\mid(i,j)\in A\}$是问题(Ⅰ)的最小费用流，其中

$$x_{ij}^*=\begin{cases}b\cdot x_{ij}^{(0)}+v-\overline{v},若(i,j)\in P\\b\cdot x_{ij}^{(0)},若(i,j)\in A\backslash P\end{cases}$$

至此，我们把分段线性费用网络流问题（Ⅰ）转化成了线性费用网络流问题（Ⅲ），利用已有的最小费用流算法[1~2]求出问题（Ⅲ）的最小费用流，从而得到问题（Ⅰ）的最小费用流。

最后，我们来估计算法复杂性。问题（Ⅰ）转化为问题（Ⅲ）需要$O(n^2)$次除法；由定理2知，把问题（Ⅲ）的最小费用流 $f_0=\{x_{ij}^{(0)}\mid(i,j)\in A\}$化成问题（Ⅰ）的最小费用流 $f^*=\{x_{ij}^*\mid(i,j)\in A\}$的过程如下：

先把 f_0 的弧流量扩大 b 倍，得

$$f=\{x_{ij}\mid x_{ij}=b\cdot x_{ij}^{(0)},(i,j)\in A\}$$

这需要$O(n^2)$次乘法；再令

$$\hat{A}=\{i,j)\mid x_{ij}>0,(i,j)\in A\}$$

作网络 D 的由 $\hat{A}$ 导出的子网络 $\hat{D}$，需要$O(n^2)$次比较；在 $\hat{D}$ 中用 Dijkstra 算法找出一条 $s-t$ 有向路 P，其计算量为$O(n^2)$[2]；然后把 P 上的弧流量 x_{ij}修改为 $x_{ij}^*=x_{ij}-\lceil v/b\rceil\cdot b+v$，因 P 上至多有$(n-1)$条弧，故最多需要$(n-1)$次加法。这样，求解问题（Ⅰ）的计算量比求解问题（Ⅲ）的计算量多$O(n^2)$.

参 考 文 献

1 田丰，马仲番．图与网络流理论．北京：科学出版社，1987

2 刘家壮，徐源．网络最优化．北京：高等教育出版社，1991

3 谢政．分段线性凸费用网络流的两个算法．国防科技大学学报，1989；11（2）：31～39

A Piecewise－linear Cost Network Flow Problem

Xie Zheng

(Department of System Engineering and Applied Mathematics)

Abstract

In this paper, we transformed a piecewise－linear cost network flow problem into the linear cost network flow problem, therefore we obtained the algorithms for the piecewise－linear cost network flow problem.

Key words network flows, piecewise－linear cost network flow, feasible flow, minimum cost flow