国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第15卷第2期　1993年6月　Vol. 15 No. 2

关于泛函微分方程 $x'(t)=A(t)f(x(t),x(x(t)))$*

时　宝

（系统工程与应用数学系）

摘　要　本文研究方程：$x'(t)=A(t)f(x(t),x(x(t)))$ 强解的渐近性态，对 Eder[1]，Wang[2]（王克）等的结果作了部分推广。

关键词　泛函微分方程，强解，饱和强解

分类号　O175.11，O177.4

郑祖庥[3,4]教授指出具依赖状态自身的偏差变元的泛函微分方程是一类新的值得研究的方程，同时也指出这类方程的研究具有很大的困难。近几年，Eder[1]，Wang[2]，吴汉忠[5,6]及时宝，舒江[7]等均对此类方程进行了一些有益的研究。

我们对以下方程：

$$x'(t)=A(t)f(x(t),x(x(t))) \tag{1}$$

作如下假设：(1) 存在正常数 μ，M，使 $\mu\leqslant A(t)\leqslant M$（或 $\mu\leqslant -A(t)\leqslant M$）；(2) $f(s,t)=0,t=0$；(3) $f(s,t)\mathrm{sgn}t>0$（或 $f(s,t)\mathrm{sgn}t<0$）；(4) $f(s,t)$ 关于 $|s|$，t 分别单调增加（或单调减少）；(5) 存在正常数 λ，α 使 $|f(t,t)|\geqslant\lambda|t|^{1+\alpha}$；(6) $A(t)$，$f(s,t)$ 分别在 R，R^2 上连续，本文只讨论上述括号外的情形。与 Wang[2]及作者类似地可给出强解，延拓及饱和强解定义等．限于篇幅，这里略去。

下面的引理是显然的。

引理 1　$x(t)$ 是方程(1)在区间 I 上的强解的必要条件为：$x(t)\in I,t\in I$.

1　方程(1)过 $(t_0,t_0)(t_0\geqslant 0)$ 强解的性态

引理 2　若 $f(t_0,t_0)<\frac{1}{M}$，则 $F(t)-\frac{t}{m}=F(t_0)-\frac{t_0}{M}$ 有且仅有一个大于 t_0 的根。这里 $F(t)=\int_{t_0}^{t}f(s,s)ds$.

证明　令 $h(t)=F(t)-\frac{t}{M}$，则 $h'(t)=f(t,t)-\frac{1}{M}$. 由(5)，存在 $t_1>t_0$，使 $f(t_1,t_1)=\frac{1}{M}$. 故 $f(t,t)<\frac{1}{M},t\in(t_0,t_1)$；$f(t,t)>\frac{1}{M}$，$t>t_1$. 故 $h(t)$ 在 $[t_0,t_1](t\geqslant t_1)$ 上单调减少（增

* 国家自然科学基金资助项目
1991年11月29日收稿

加)。即得结论并记其根为 t^*，证完。

引理 3　若 $t_0\geqslant 0$，$f(t_0,t_0)<\frac{1}{M}$，则(E)在$[t_0,t^*]$上存在强解且 $i).\ x(t_0)=t_0$;$ii).\ t_0\leqslant x(t)\leqslant t, t\in[t_0,t^*]$;$iii).\ x(t)$ 单调增加。

证明　设 $G=\{g\in C([t_0,t^*],R): g(t_0)=t_0, t_0\leqslant g(t)\leqslant t; g(t)$单调增加且$|g(\alpha)-g(\beta)|\leqslant Mf(t^*,t^*)|\alpha-\beta|, \alpha,\beta\in[t^0,t^*]\}$及$\|g\|=\sup\limits_{t_0\leqslant t<t^*}|g(t)|$. 显见 G 是凸紧集，易证算子 T: $G\to G$ 连续. 其中 $(Tg)(t)=t_0+\int_{t_0}^{t}A(s)f(x(s),x(x(s)))ds$. 再由 Schauder 不动点定理即得证，证完。

引理 4　设 $t_0\geqslant 0$，$f(t_0,t_0)<\frac{1}{M}$，$x(t)$是(E)在$[t_0,t^*]$上的强解，且满足引理 3 的 $i)$-$iii)$. 若 $x(t^*)<t^*$，则 $x(t)$有右延拓 $y(t)$，$t\in[t_0,t^{**}]$，$t^{**}=t^*+\frac{t^*-x(t^*)}{Mf(t^*,t^*)}>t^*$，且 $t_0\leqslant y(t)\leqslant t$，$y(t)$单调增加。

与引理 1，2 的证明方法类似地可证，略去。

引理 5　若 $t_0>0$，$f(t_0,t_0)\geqslant\frac{1}{\mu}$，则对任何 $\bar{t}>t_0$，(E)在$[t_0,\bar{t}]$上无强解。

证明　设不然，(E)在$[t_0,\bar{t}]$上有强解 $x(t)$，则 $x'(t)=A(t)f(x(t),x(x(t)))\geqslant\mu f(t_0,t_0)\geqslant 1$，从而 $x(t)\geqslant t$.

事实上，应有 $x(t)>t$. 若否，则存在 $t_1>t_0$，使 $x(t_1)=t_1$，$x(t)>t$. $t<t_1$.　但$x'_-(t_1)\leqslant 1$. 矛盾。

由引理 1，$\bar{t}=+\infty$. 若不然，有 $x(\bar{t})>\bar{t}$. 矛盾。又 $x'(t)=A(t)f(x(t),x(x(t)))\geqslant\mu f(x(t),x(t))\geqslant\mu\lambda(x(t))^{1+\alpha}$. 故$(x(t))^{\alpha}\geqslant((x(t_0))^{-\alpha}-\frac{\mu\lambda}{2}(t-t_0))^{-1}\to+\infty$，$(t\to t_0+\frac{\alpha}{\mu\lambda}(x(t_0))^{-\alpha})$. 矛盾。证完。

引理 6　设 $t_0>0$，$f(t_0,t_0)<\frac{1}{M}$. 若 $x(t)$是(E)在$[t_0,\bar{t}]$上满足 $x(t_0)=t_0$ 的强解，则 $i).\ t_0\leqslant x(t)\leqslant t, t\in[t_0,\bar{t}]$;$ii)\ x(t)$单调增加。

证明很容易，这里略去。

引理 7　设 $x(t)$是(E)在$[0,\bar{t}]$上的强解. 若存在 $t_0\in(0,\bar{t}]$，使 $x(t_0)=0$，则 $x(t)\equiv 0$，$t\in[0,\bar{t}]$.

证明　由引理 1 知 $x(t)\geqslant 0$，$t\in[0,\bar{t}]$. 设存在 $t_1\in(0,t_0)$，使 $x(t_1)>0$，则存在 $t_2\in(t_1,t_0)$，使 $x'(t_2)<0$，$x(t_2)>0$. 但 $x'(t_2)=A(t_2)f(x(t_2),x(x(t_2)))\geqslant\mu f(0,0)=0$. 矛盾. 同理考虑$(t_0,\bar{t}]$，证完。

引理 8　设 $x(t)$是(E)在$[\alpha,\beta]$上的饱和强解，且过$(\xi,\eta)\in A_1=\{(\xi,\eta)\in R^2, \xi>\eta>0\}$，则存在 t_1，t_2，$0\leqslant t_1<\xi<t_2$，使 $x(t_1)=t_1$，$x(t_2)=t_2$，且$(t,x(t))\in A_1$，$t\in(t_1,t_2)$，$x(t)$单调增加，若 $A(t_2)=\mu$，则 $\beta=t_2$.

证明　由引理 6 及文献 [7] 的定理 6 知存在 $t_1\leqslant t_2$，使 $x(t_1)=t_1$，$x(t_2)=t_2$. 再由假设及引理 5，7 知 $0\leqslant t_1<\xi<t_2$，且$(t,x(t))\in A_1$. 而由引理 5，后一结论是显然的。证完。

类似于引理 3、4 我们有下面两个引理.

引理 9　设 $t_0>0$，$f(t_0,t_0)\leqslant\frac{1}{M}$，则存在 $\bar{t}<t_0$，使(E)在$[\bar{t},t_0]$上有强解，且满足：$i).\ x(t_0)=t_0$；$ii).\ t\leqslant x(t)\leqslant t_0,t\in[\bar{t},t_0]$；$iii).\ x(t)$单调增加。

引理 10　设 $t_0>0$，$f(t_0,t_0)<\frac{1}{M}$，$x(t)$是(E)在$[\bar{t},t_0]$上的强解，且满足引理 9 的 $i)$-$iii)$．若 $x(\bar{t})>0$，则 $x(t)$有左延拓 $y(t)$，$t\in[t',t_0]$，$t'<\bar{t}$ 及 $t\leqslant y(t)\leqslant t_0$，$t\in[t',t_0]$，$y(t)$单调增加。

引理 11　若 $x(t)$是(E)在$[\alpha,\beta]$上满足 $x(t_0)=t_0,t_0>0,f(t_0,t_0)<\frac{1}{M}$的饱和强解，则存在 $t'<0$，使 $x(t')=0$，且 t'是唯一的与 $x=0$ 的交点.

证明　先证存在 t'，使 $x(t')=0$. 若不然，$x(t)>0$，$t\in[\alpha,t_0]$. 易证 $x(t)$满足引理 9 的 $i)$-$iii)$. 由引理 10，$\alpha=-\infty$. 又存在 ξ，$0\leqslant\xi\leqslant t_0$，使 $x(t)\to\xi(t\to-\infty)$. 另外 $x'(t)=A(t)f(x(t),x(x(t)))\geqslant\mu f(x(t),x(x(t)))\to\mu f(\xi,x(\xi))\geqslant\mu f(\xi,x(0))>0$ 及 $x(t)\leqslant t_0+\mu f(\xi,x(0))(t-t_0)\to-\infty(t\to-\infty)$. 矛盾。以下设 t'是最大零点。

$t'<0$ 是显然的。下证 t'的唯一性。设不然，存在 t_1 最靠近 t'且 $x(t_1)=0$. 因为 $x'(t')=A(t')f(x(t'),x(x(t')))\geqslant\mu f(x(t'),x(0))>0$，故存在 t'的邻域 $N_{t'}$，使 $x(t)\neq0$，$t\in N_{t'}\setminus\{t'\}$. 则存在 $t_2\in(t_1,t')$，使 $x(t)$在 t_2 处取极小值，故 $x'(t_2)=0,x(x(t_2))=0$，而 $t_1<x(t_1)<x(t_2)\leqslant t'$，故 $x(t_2)=t'$. 则存在 $t_3\in(t_1,t_2)$，使 $x'(t_3)<0,t'<x(t_3)<0$. 但是 $x'(t_3)=A(t_3)f(x(t_3),x(x(t_3)))>\mu f(0,0)=0$. 矛盾。证完。

综上所述，我们有

定理 1　(1)若 $t_0>0$，$f(t_0,t_0)<\frac{1}{M}$，则存在过(t_0,t_0)的单调增加饱和强解。右端至少可以延拓到 $t_2>t_0$，使 $x(t_2)=t_2$. 若 $A(t_2)=\mu$，则 t_2 为右端点，在左端可延拓到$-\infty$，且存在 $t'<0$，使 $x(t')=0$，t'唯一，$x(t)>t'$，$x(t)\to t'(t\to-\infty)$；(2) 若 $t_0>0$，$f(t_0,t_0)>\frac{1}{\mu}$，则 t_0 为右端点；(3). 若 $t_0>0$，$f(t_0,t_0)<\frac{1}{M}$，$x(t)$是(E)的单调增加饱和强解，则 $x(t_0)=t_0$，(1) 中的其他结论都成立.

2　方程(1)过$(t_0,t_0)(t_0<0)$强解的性态

令 $\Phi=\{\varphi\in C([t_0,0],R):\varphi(t_0)=t_0,\varphi(t)$单调减少，$t_0\geqslant\varphi(t)\geqslant t_0+Mf(t_0,t_0)(t-t_0)$，$|\varphi(\alpha)-\varphi(\beta)|\leqslant M|f(t_0,t_0)||\alpha-\beta|\}$，

$\psi=\{\psi\in C([t_0,0],R):\psi(t_0)=t_0,\psi(x)$单调减少，$t_0\geqslant\psi(x)\geqslant t_0+\frac{x-t_0}{Mf(t_0,t_0)}$，$|\psi(\alpha)-\psi(\beta)|\leqslant\frac{|\alpha-\beta|}{M|f(t_0,t_0)|}\}$..

定义三个算子：P：$\Phi\to\Psi$，Q：$\Psi\to\Phi$，$T=QP$：$\Phi\to\Phi$. 易证 P，Q，T 均连续. 显见 Φ 是凸紧集，由 Schauder 不动点定理，存在 $\varphi^*\in\Phi$，使 $T\varphi^*=\varphi^*$.

引理 12　若 $\varphi\in\Phi$，则方程 $y'(t)=A(t)f(y(t),\varphi(y(t)))$ 在 $[t^*,t_0]$，$t_0\left(1-\frac{1}{Mf(t_0,t_0)}\right)<t^*<t_0$，上有且仅有一个解 $y(t)$，且 $i)$. $y(t^*)=0,y(t_0)=t_0$；$ii)$. $y(t)$单调减少；$iii)$. 若 Ψ 是 y 的反函数，则 $\psi\in\Psi$.

证明 $i),ii)$易证，下面只证$iii)$. 因为$y'(t)=A(t)f(y(t),\varphi(y(t)))<Mf(t_0,t_0)$，故有$\psi'(x)\geqslant\frac{1}{Mf(t_0,t_0)},\psi(0)-\psi(t_0)\geqslant\frac{-t_0}{Mf(t_0,t_0)}$，及$\psi(0)\geqslant t_0-\frac{t_0}{Mf(t_0,t_0)}$. 还有$0\geqslant\psi'(x)$及$t_0\geqslant\psi(x)\geqslant t_0+\frac{x-t_0}{Mf(t_0,t_0)}$. 由于$\psi(x_1)-\psi(x_2)=\psi'(\theta)(x_1-x_2)$，$\theta$在$x_1$，$x_2$之间，所以$|\psi(x_1)-\psi(x_2)|\leqslant|\psi'(\theta)||x_1-x_2|\leqslant\frac{|x_1-x_2|}{M|f(t_0,t_0)|}$. 故$\psi\in\Psi$.

注意到对任何Ψ_1，$\Psi_2\in\Psi$，有$\Psi_1(t_0)=\Psi_2(t_0)=t_0$，唯一性易证。证完。

类似地，我们还有

引理12 设$\psi\in\Psi$，y是ψ的反函数，则方程：$\varphi'(t)=A(t)f(\varphi(t),y(\varphi(t)))$有唯一解$\varphi\in\Phi$，且$i)$. $\varphi(t_0)=t_0$；$ii)$. $\varphi(t)$单调减少。

定理2 若$t_0<0$，则(E)在R上存在饱和强解$x(t)$，且$i)$. $x(t_0)=t_0$；$ii)$. $x(t)$单调减少；$iii)$. 存在$t'<0$，使$x(t')=0$且t'唯一；$iv)$. $x(t)\to t'(t\to+\infty)$，$x'(t)\to\mu f(t',t')(t\to-\infty)$.

证明 设y^*是$P\varphi^*$的反函数. 令$t'=(P\varphi^*)(0)$，则$\varphi^*(0)\geqslant(P\varphi^*)(0)=t'$. 考虑方程：

$$x'(t)=A(t)f(x(t),y^*(x(t))),x(0)=\varphi^*(0)\qquad(2)$$

若$\varphi^*(0)=t'$，则$x(t)\equiv t'$，$t\geqslant0$是(1)的解；若$\varphi^*(0)>t'$，则对充分小的$\delta>0$，(2)在$[0,\delta]$上有一单调减少解$\varphi_1(t)$，且$\varphi_1(t)>t'$，$t\in[0,\delta]$，考虑方程$y'(t)=A(t)f(y(t),\varphi_1(y(t))),y(t')=0$. 它在$[r,t']$上有一个解$y_1(t)$，$r<t'$，且$y_1(t)$单调减少，满足$y_1(r)=\delta$.

设 $$\bar{y}(t)=\begin{cases}y^*(t),t\in[t',t_0]\\y_1(t),t\in[r,t']\end{cases}$$ 考虑方程：

$$x'(t)=A(t)f(x(t),\bar{y}(x(t))),x(0)=\varphi^*(0)\qquad(3)$$

往证(3)在$[0,+\infty)$上有解$\bar{\varphi}(t)$. 为此，只需证$\bar{\varphi}(t)\geqslant t'$对一切$t\in[0,+\infty)$有定义。设不然，存在$t_1>\delta$，使$\bar{\varphi}(t_1)<t'$，则存在$t_2$，$\delta<t_2\leqslant t_1$，使$\bar{\varphi}'(t_2)<0$，$r<\bar{\varphi}(t_2)<t'$. 但另一方面有$\bar{\varphi}'(t_2)=A(T_2)f(\bar{\varphi}(t_2),\bar{y}(\bar{\varphi}(t_2)))>0$. 矛盾。

下证$\bar{\varphi}(t)\to t'(t\to+\infty)$. 若不然，存在$t_1'$，使$\bar{\varphi}(t)\to t_1'(t\to+\infty)$，则$\bar{\varphi}(t)'=A(t)f(\bar{\varphi}(t),\bar{y}(\bar{\varphi}(t)))\leqslant Mf(t_1',\bar{y}(t'_1))<0$及$\bar{\varphi}(t)\to-\infty(t\to+\infty)$. 矛盾。定义

$$\tilde{\varphi}(t)=\begin{cases}y^*(t),t\in[t',t_0]\\\varphi^*(t),t\in[t_0,0]\\\bar{\varphi}(t),t\in[0,+\infty)\end{cases}$$ 考虑方程：

$$x'(t)=A(t)f(x(t),\tilde{\varphi}(x(t))),x(t')=0\qquad(4)$$

易证(4)在$[t'-\delta,t']$上，当$\delta>0$充分小时，有解$\tilde{y}(t)$，且$\tilde{y}'(t)=A(t)f(\tilde{y}(t),\tilde{\varphi}(\tilde{y}(t)))\geqslant\mu f(t',t')$. 因此，$\tilde{y}(t)$可延拓到$(-\infty,t']$，且$\bar{y}'(t)=A(t)f(\tilde{y}(t),\tilde{\varphi}(\tilde{y}(t)))\geqslant\mu f(\tilde{y}(t),\tilde{\varphi}(\tilde{y}(t)))\to\mu f(t',t'),(t\to-\infty)$. 定义 $x(t)=\begin{cases}\tilde{y}(t),t\in(-\infty,t_1]\\\tilde{\varphi}(t),t\in(t',+\infty)\end{cases}$ 易见$x(t)$是(1)的饱和强解，且定理中的$i)$-$iv)$成立。

我们还可以得到

定理 3 若 $x(t)$ 是(1)在 $[\alpha,\beta]$ 上的饱和强解，$x(t_0)=t_0,t_0<0$，则 $i).\ \alpha=-\infty,\beta=+\infty$；$ii)$，$x(t)$ 单调减少；$iii)$ 存在 $t'<0$，使 $x(t')=0$；$iv).\ x(t)\to t'(t\to+\infty),x'(t)\to\geqslant\mu f(t',t'),(t\to-\infty)$.

3 方程 (1) 的强解的其他性质

利用引理 1、3 及反证法，易证下面的

定理 4 若 $x(t)$ 是(1)在 $[\alpha,\beta]$ 上的饱和强解，使 $(\xi,x(\xi))\in A_2=\{(\xi,\eta)\in R^2,\xi<\eta\}$，$\xi\in[\alpha,\beta]$，则存在 $t_0\in[\alpha,\beta]$，使 $x(t_0)=t_0$.

引理 14 若 $x(t)$ 是(1)在 $[\alpha,\beta]$ 上的饱和强解，且 $x(0)=0$，则不存在 $(\xi,\eta)\in A_3=\{(\xi,\eta)\in R^2,\xi>\eta,\eta<0,\xi>0\}$，使 $x(\xi)=\eta$.

证明 设不然，存在 $(\xi,\eta)\in A_3$，使 $x(\xi)=\eta$，则由引理 1 有 $[\eta,\xi]\subset[\alpha,\beta]$，存在 $t_1\in(0,\xi)$，使 $\eta<x(t_1)<0,x'(t_1)<0$，所以 $x(x(t_1))<0$，因此存在 $t_2\in(x(t_1),0)$，使 $x(t_2)<0,x'(t_2)>0$，故 $x(x(t_2))>0$，存在 $\delta>0$，使 $x(t_1)<x(t_2)-\delta<x(t_2)+\delta<0$，及 $x(t)>0,t\in[x(t_2)-\delta,x(t_2)+\delta]\subset(x(t_1),0)$. 设

$$S=\{(t,x):x(t_2)-\delta\leqslant x\leqslant x(t_2)+\delta,t\in R\}$$

由 $x(0)=0,x(\xi)=\eta;\eta<x(t_2)-\delta<x(t_2)+\delta<0,\{(t,x(t)):t\in[0,\xi]\}$ 必通过 S. 但由于 $(t,x(t))\in S$ 时，$x'(t)>0$，矛盾。

定理 5 若 $x(t)$ 是(1)在 $[\alpha,\beta]$ 上的饱和强解，且 $x(\xi)=\eta,(\xi,\eta)\in A_3$，则存在 $t_0<0$，使 $x(t_0)=t_0$.

证明 若 $x(t)\in A_3,t\in[\alpha,\xi]$，则 $x(t)\leqslant 0$. 另外，若 $x(t)\geqslant\eta,t\in[\alpha,\xi]$，则 $\alpha>-\infty$，$x(\alpha)<\alpha$. 与引理 1 矛盾。因此，存在 $t_1\in(\alpha,\xi)$，使 $x(t_1)<\eta$，则存在 $t_2\in[t_1,\xi]$，使 $x'(t_2)>0$. 所以 $x(x(t_2))>0$. 矛盾。故存在 $t^*\in[\alpha,\xi]$，使 $x(t^*)\overline{\in}A_3$. 设 $t^{**}=\sup\{t^*:t^*\in[\alpha,\xi],x(t^*)\overline{\in}A_3\}$. 若 $t^{**}\geqslant 0$，则 $x(t^{**})=0$. 由引理 8，不存在 $s\in[\alpha,\xi]$，使 $(s,x(s))\in A_1$. 所以 $x'(t^{**})\doteq 0$，亦即 $x(0)=x(x(t^{**}))=0$. 由引理 14，$(t,x(t))\overline{\in}A_3,t\in[0,\beta]$. 矛盾。所以 $t^{**}<0$. 证完。

由上所述，我们有

定理 6 若 $x(t)$ 是 (E) 在 $[\alpha,\beta]$ 上的饱和强解，$x(0)=0$，则 $i).\ \alpha=-\infty,\beta=+\infty,x(t)\equiv 0$；$ii).\ \alpha=-\infty,x(t)\equiv 0,t\leqslant 0,\beta<+\infty,x(t)>0$ 且单调增加，$t\in(0,\beta]$.

设 $\mathscr{A}$ 是 (1) 的全部饱和强解组成的集合，$\mathscr{B}=\{x\in\mathscr{A}:$ 存在 t_0，使 $x(t_0)=t_0\}$.

综上所述，我们最后得到了

定理 7 $\mathscr{A}=\mathscr{B}$

作者衷心感谢老师李志祥博士的悉心指导和热情帮助！

（下转第 110 页）

A Dual Simplex Algorithm for Solving Linear Goal programming with Bounded Variables

Xu Beider

(Department of System Engineering and Applied Mathematics)

Abstract

This paper discussed the problem of linear goal programming with bounded variables and gave a dual simplex algorithm for soluing this kind of problem. The algorithm is analogous to the dual simplex algorithm for linear programming with bounded variables. The efficiency of the algorithm is proved and an example is given to show the proccedure of the algorithm.

Key words goal programming, regular solution dual, simplex algorithm

(上接第 88 页)

参 考 文 献

1 Eder E.. J. Diff. Eqns.,1984;54(3):390-400

2 Wang K.(王克). Funk. Ekv.,1990;33:405-425

3 郑祖庥,数学进展. 1983;11(1):94－112

4 郑祖庥,全国第五届泛涵微分方程学术会议综述报告. 呼和浩特,1990

5 吴汉忠. 安徽大学硕士论文,1990

6 吴汉忠. 一类偏差依赖状态自身的泛函微分方程. 数学学报,待发表

7 时宝,舒江. 见中国工业与应用数学学会第二次大会文集. 上海,1992:82－85.

On the Functional Differential Equation $x'(t)=A(t)f(x(t),x(x(t)))$

Shi Bao

(Department of System Engineering and Applied Mathematics)

Abstract

In this paper, we studied the asymptotical behaviour of the strong solutions of the Equation:

$$x'(t) = A(t)f(x(t),x(x(t)))$$

and partially generalize the results of Eder[1] and Wang[2], etc..

Key words functional differential equations, strong solutions, maximal strong solutions