国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第15卷第2期　1993年6月　Vol. 15 No. 2

变量有界线性目标规划的对偶算法*

徐培德

（系统工程与应用数学系）

摘　要　本文讨论了变量有界的线性目标规划问题，给出了求解这类问题的一个对偶算法，此方法与变量有界线性规划问题的对偶算法相类似。文中证明了算法的有效性，并举例说明了计算过程。

关键词　目标规划，正则解，对偶算法

分类号　O221.1

目标规划的概念由 A. Charnes 和 W. W. Cooper 于1961年首先提出［1］，S. M. Lee 于1972年将线性规划的单纯形法加以推广改进而得到了求解目标规划的单纯形法，J. P. Ignizio 依次在1979年提出了求解目标规划的序贯式算法（SLGP），在1982年提出了一个多阶段算法，在1983年利用正负偏差变量的对称性给出了反射P空间算法。J. Ignizio 还在文献［2］中提出了目标规划的对偶理论、在文献［3］中提出了求解线性目标规划的多维对偶算法。

本文将讨论变量有界的线性目标规划问题（BLGP）。这类问题与有界变量的线性规划问题相类似[4]~[6]，我们利用目标规划多维对偶算法的思想，将有界变量线性规划对偶算法加以推广，导出了求解 BLGP 的对偶算法。

1　模　型

一般的 BLGP 模型为：

$$\text{lexmin } a = (a_1, a_2, \cdots, a_k) \tag{1}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \eta_i - \rho_i = b_i, i = 1, \cdots, m \\ L \leqslant X \leqslant U, \ \eta \geqslant 0, \ \rho \geqslant 0 \end{cases}$$

式中 $a_k = \sum_{i=1}^{m} W_{ki}^{-}\eta_i + \sum_{i=1}^{m} W_{ki}^{+}\rho_i, k = 1, \cdots, K,$

$W_{ki}^{+} \geqslant 0$，$W_{ki}^{-} \geqslant 0$，表示第 k 级目标中 η_i 和 ρ_i 的权；lexmin 意为求字典序最小向量；$\rho = (\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_m)^T$ 和 $\eta = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m)^T$ 分别表示正、负偏差变量；$L = (l_1, l_2, \cdots, l_n)^T$ 是 X 的下界；$U = (u_1, u_2, \cdots, u_n)^T$ 是 X 的上界，并且 $0 \leqslant l_j \leqslant u_j \leqslant +\infty$，$j=$

* 1991年12月24日收稿

1，2，…，n.

对此 BLGP 模型，如引进 $2n$ 个约束 $X\leqslant U, X\geqslant L$，便可转化成一般的目标规划问题，但这样会使问题规模增加很大，不太经济。下面我们给出的算法中将不增加新的约束。

记 $C^k=(0, \cdots, 0, W_{k1}^-, \cdots, W_{km}^-, W_{k1}^+, \cdots W_{k1}^+)$，$V=\begin{pmatrix} x \\ \eta \\ \rho \end{pmatrix}$

$A=(a_{ij})_{m\times n}$；$a_k=C^kV$，$k=1, 2, \cdots, K$；$AX+\eta-\rho=(A, I, -I)\ V=b$

设 B 是该目标规划的一个基，使 $(A, I, -I)=(B, N)$，B 所对应的变量 $V_B=(v_{j1}, v_{j2}, \cdots v_{jm})^T$ 称为基变量，N 所对应的变量 V_N 称为非基变量，V_N 的下标集记为 Q，从而

$$V_B=B^{-1}b-B^{-1}NV_N; a_k=C_B^kB^{-1}b+(C_N^k-C_B^{-1}B^{-1}N)V_N$$

令
$$B^{-1}N=(b_{ij})_{m\times(n+m)}; C_N^R-C_B^kB^{-1}N=(R_{kj})_{1\times(n+m)}$$

$$\bar{l}_j=\begin{cases} l_j, & j=1,\cdots,n \\ 0, & j=n+1,\cdots,n+2m \end{cases} \qquad \bar{u}_j=\begin{cases} u_j, j=1,\cdots,n \\ +\infty, j=n+1,\cdots,n+2m \end{cases}$$

使 $\bar{L}=(\bar{l}_1, \cdots, \bar{l}_{n+2m})$ 和 $\bar{U}=(\bar{u}_1, \cdots, \bar{u}_{n+2m})$ 分别作为 V 的下界和上界。由此，可以建立对应于基 B 的如下初始单纯形表。

V_B	V_B^0	$v_{j,j}\in Q_1$	$v_{j,j}\in Q_2$	Z_B^0
v_{j1}	b_{10}	$\cdots b_{1j}\cdots$	$\cdots b_{1j}\cdots$	z_1^0
v_{j2}	b_{20}	$\cdots b_{2j}\cdots$	$\cdots b_{2j}\cdots$	z_2^0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots\ \vdots\ \vdots$	$\vdots\ \vdots\ \vdots$	$\vdots$
v_{jm}	b_{m0}	$\cdots b_{mj}\cdots$	$\cdots b_{mj}\cdots$	z_m^0
P_1	R_1^0	$\cdots R_{1j}\cdots$	$\cdots R_{1j}\cdots$	a_1^0
P_2	R_2^0	$\cdots R_{2j}\cdots$	$\cdots R_{2j}\cdots$	a_2^0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots\ \vdots\ \vdots$	$\vdots\ \vdots\ \vdots$	$\vdots$
P_k	R_k^0	$\cdots R_{kj}\cdots$	$\cdots R_{kj}\cdots$	a_k^0

这里所给的单纯形表根据文献［3］和［6］的单纯形表的结构编制。表中 Q_1 和 Q_2 是 Q 的一个剖分，使得

$$Q_1=\{j|j\in Q \text{ 且 } x_j=\bar{l}_j\}; Q_2=\{j|j\in Q \text{ 且 } x_j=\bar{u}_j\}$$

$$Z_i^0=b_{i0}-\sum_{j\in Q_1}b_{ij}\bar{l}_j-\sum_{j\in Q_2}b_{ij}u_j, i=1,\cdots,m$$

$$a_k^0=R_{k0}-\sum_{j\in Q_1}R_{kj}\bar{l}_j-\sum_{j\in Q_2}R_{kj}\bar{u}_j, k=1,\cdots,K$$

而
$$R_{k0}=-C_B^kB^{-1}b, k=1,\cdots,K$$

称 $R_j=(R_{1j}, R_{2j}, \cdots, R_{kj})^T$ 为对应基 B 非基变量 v_j 的检验向量。

设 V 满足

$$\begin{cases} v_{ji} = z_i^0, i = 1,2,\cdots,m \\ v_j = \bar{l}_j, j \in Q_1 \\ v_j = \bar{u}_j, j \in Q_2 \end{cases}$$

则称 V 是目标规划（1）的一个基本解，如果 V 还满足

$$\bar{l}_j \leqslant v_j \leqslant \bar{u}_j, j = 1,2,\cdots,n+2m \tag{2}$$

则称 V 为一个基本可行解，称 v_j，$j\in Q_1$ 为第一类非基变量，称 v_j，$j\in Q_2$ 为第二类非基变量。

设 V 是基可行解。如果还有

$$\begin{cases} R_j \quad \text{lex} \geqslant 0 \quad, j \in Q_1 \\ R_j \quad \text{lex} \leqslant 0 \quad, j \in Q_2 \end{cases} \tag{3}$$

则 V 便是（1）的一个最优解。（3）中 lex≥表示字典序大于等于。

如果 V 是一个基本解，同时还满足（3），则称 V 是（1）的一个正则解。

下面给出的算法将从（1）的一个正则解出发，进行对偶单纯形迭代，每次迭代后仍保持为正则解，最后达到条件（2）也满足，从而得到最优解。

2 算法步骤

设 V 是一个正则解，B 是对应的基，首先建立对应的初始单纯形表。

Step1 计算

$$z_i^0 = b_{i0} - \sum_{j\in Q_1} b_{ij}\bar{l}_j - \sum_{j\in Q_2} b_{ij}\bar{u}_j, i = 1,2,\cdots,m$$

$$a_k^0 = R_{k0} - \sum_{j\in Q_1} R_{kj}\bar{l}_j - \sum_{j\in Q_2} R_{kj}\bar{u}_j, k = 1,2,\cdots,K$$

Step2 若 $\bar{l}_{ji}\leqslant z_i^0\leqslant \bar{u}_{ji}$，$i=1, 2, \cdots, m$，当前的正则解是一个最优解，计算停止。否则转 Step3。

Step3 确定出基变量 v_{js}，其中

$$j_s = \min\{j_i | z_i^0 < \bar{l}_{ji} \text{ 或 } z_i^0 > \bar{u}_{ji}, i = 1,\cdots,m\}$$

若 $z_s^0 < l_{js}$，则 v_{js} 出基后为第一类非基变量，转 Step4。

若 $z_s^0 > \bar{u}_{js}$，则 v_{js} 出基后为第二类非基变量，转 Step6.

Step4 令

$$\psi = \text{lexmax}\{\frac{1}{b_{sj}}R_j | b_{sj} < 0, j \in Q_1 \text{ 或 } b_{sj} > 0, j \in Q_2\}$$

$$r = \min\{j | j \in Q_1, b_{sj} < 0, \frac{1}{b_{sj}}R_j = \psi \text{ 或 } j \in Q_2, b_{sj} > 0, \frac{1}{b_{sj}}R_j = \psi\}$$

取 v_r 为进基变量，并以 b_{sr} 为主元作单纯形迭代后转 Step5.

Step5 若 $r\in Q_1$，置

$$Q_1 = Q_1 \cup \{j_s\} \setminus \{r\}; Q_2 = Q_2$$

若 $r\in Q_2$，置

$$Q_1 = Q_1 \cup \{j_s\}; Q_2 = Q_2 \setminus \{r\}$$

返回 Step1.

Step6 令

$$\overline{\psi} = \text{lexmin}\{\frac{l}{b_{sj}}R_j b_{sj} > 0, j \in Q_1 \text{ 或 } b_{sj} < 0, j \in Q_2\}$$

$$r = \min\{j \mid j \in Q_1, b_{sj} > 0, \frac{1}{b_{sj}}R_j = \overline{\psi} \text{ 或 } j \in Q_2, b_{sj} < 0, \frac{1}{b_{sj}}R_j = \overline{\psi}\}$$

取 v_u 为进基变量，并以 b_{sr}为主元作单纯形迭代后转 Step7.

Step7 若 $r \in Q_1$，置

$$Q_1 = Q_1 \backslash \{r\}; Q_2 = Q_2 \cup \{j_s\}$$

若 $r \in R_2$，则置

$$Q_1 = Q_1; Q_2 = Q_2 \cup \{j_s\} \backslash \{r\}$$

返回 Step1.

关于此算法我们有如下结论。

定理 1 算法从一个正则解出发经一次迭代后所得的解仍是正则解，并且当 $R_r \neq 0$ 时，目标函数向量是字典序严格增加的。

证明 略。

3 举 例

如开始没有 BLGP 问题的正则解，可以先求解如下对应的变量无上下界约束问题

$$\text{lexmin } a = (a_1, a_2, \cdots, a_k)$$

$$\begin{cases} \sum a_{ij}x_j + \eta_i - \rho_i = b_i, i = 1, 2, \cdots, m \\ x \geqslant 0, \eta \geqslant 0, \rho \geqslant 0 \end{cases} \tag{4}$$

得到（4）的一个最优解 $\overline{V}$。设 $\overline{V}$ 对应的基为 B，非基变量的下标集为 Q，令

$$\begin{cases} v_j^0 = l_j, j \in Q \\ v_{ji}^0 = b_{i0} - \sum\limits_{j \in Q} b_{ij}l_j, i = 1, \cdots, m \end{cases}$$

则所得到的 $V^0 = (v_1^0, v_2^0, \cdots, v_{n+2m}^0)$ 是问题（1）的一个正则解。V^0 可作为求解（1）的初始解。

例 1 求解

$$\text{lexmin } a = (\rho_1, \eta_2, \rho_3, \eta_4)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \eta_1 - \rho_1 = 14 \\ x_1 + x_2 + \eta_2 - \rho_2 = 8 \\ -x_1 + 2x_2 + \eta_3 - \rho_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + \eta_4 - \rho_4 = 16 \\ 1 \leqslant x_1 \leqslant 10, 2 \leqslant x_2 \leqslant 12, \eta_i \geqslant 0, \rho_i \geqslant 0 \end{cases} \tag{5}$$

解 先求解对应的问题（4），得到最优解如表 1。

令表 1 中的非基变量都取下界值，并补上解列 z_B^0，得到表 2. 我们用$\overset{(l_j)}{\underset{\cdot}{v_j}}$表示非基变量 v_j 是第一类的并取下界值 l_j. 用$\overset{(u_j)}{v_j}$表示非基变量 v_j 是第二类的并取上界值 u_j. 此时我们得到了原问题（5）的一个正则解 $V^0 = (x_1, x_2, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4)^T = (12,$

2, 0, 0, 14, 6, 0, 6, 0, 0,$)^T$。

表 1

V_B	V_B^0	η_2	x_2	ρ_1	η_1	ρ_3	ρ_4
ρ_2	6	−1	0	−1	1	0	0
x_1	14	0	1	−1	1	0	0
η_3	20	0	3	−1	1	−1	0
η_4	2	0	−2	1	−1	0	−1
p_1	0	0	0	1	0	0	0
p_2	0	1	0	0	0	0	0
p_3	0	0	0	0	0	1	0
p_4	−2	0	2	−1	1	0	1

表 2

V_B	V_B^0	$\overset{(0)}{\dot{\eta}_2}$	$\overset{(2)}{\dot{x}_2}$	$\overset{(0)}{\dot{\rho}_1}$	$\overset{(0)}{\dot{\eta}_1}$	$\overset{(0)}{\dot{\rho}_3}$	$\overset{(0)}{\dot{\rho}_4}$	Z_B^0
ρ_1	6	−1	0	−1	1	0	0	6
x_1	14	0	1	−1	1	0	0	12
η_3	20	0	3	−1	1	−1	0	14
η_4	2	0	−2	1	−1	0	−1	6
p_1	0	0	0	1	0	0	0	0
p_2	0	1	0	0	0	0	0	0
p_3	0	0	0	0	0	1	0	0
p_4	−2	0	2	−1	1	0	1	−6

因 $x_1=12>10=\bar{\mu}_1$，故让 x_1 出基，出基后变化第二类非基变量，取上界值 10，由算法中的 Step6 选 出进基变量 η_1. 对表 2 进行迭代后补上解列得到表 3. 此时得到的正则解 $(x_1,\ x_2)=(10,\ 2)$，满足有界性条件，从而是最优解，算法停止。

表 3

V_B	V_B^0	$\overset{(0)}{\dot{\eta}_2}$	$\overset{(2)}{\dot{x}_2}$	$\overset{(0)}{\dot{\rho}_1}$	$\overset{(10)}{\dot{x}_1}$	$\overset{(0)}{\dot{\rho}_3}$	$\overset{(0)}{\dot{\rho}_4}$	Z_B^0
ρ_2	−8	−1	−1	0	−1	0	0	4
η_1	14	0	1	−1	1	0	0	2
η_3	6	0	2	0	−1	−1	0	12
η_3	16	0	−1	0	1	1	−1	8
p_1	0	0	0	1	0	0	0	0
p_2	0	1	0	0	0	0	0	0
p_3	0	0	0	0	0	1	0	0
p_4	−16	0	1	0	−1	0	1	−8

参 考 文 献

1 A Charnes, W W Cooper. Managment Models and The Industrial Applications of Linear programming. Wiley, New york, 1961, 1

2 Ignizio J P. Multidimensional Dual Linear Goal programming. Computer. O. R, 1983; (10)

3 Ignizio J P. J. O. R. S. (U. K), 1985; 36 (6): 507～515.

4 张干宗. 线性规划. 武汉：武汉大学出版社，1990: 191－225.

5 马仲蕃. 变量有上界线性规划问题的对偶算法. 应用数学学报，1982; (1)

6 陈庆华. 国防科技大学学报，1984; (3): 191～197

A Dual Simplex Algorithm for Solving Linear Goal programming with Bounded Variables

Xu Beider

(Department of System Engineering and Applied Mathematics)

Abstract

This paper discussed the problem of linear goal programming with bounded variables and gave a dual simplex algorithm for soluing this kind of problem. The algorithm is analogous to the dual simplex algorithm for linear programming with bounded variables. The efficiency of the algorithm is proved and an example is given to show the proccedure of the algorithm.

Key words goal programming, regular solution dual, simplex algorithm

---

(上接第 88 页)

参 考 文 献

1 Eder E., J. Diff. Eqns., 1984; 54(3): 390-400

2 Wang K.(王克). Funk. Ekv., 1990; 33: 405-425

3 郑祖庥,数学进展. 1983; 11(1): 94－112

4 郑祖庥,全国第五届泛涵微分方程学术会议综述报告. 呼和浩特,1990

5 吴汉忠. 安徽大学硕士论文,1990

6 吴汉忠. 一类偏差依赖状态自身的泛函微分方程. 数学学报,待发表

7 时宝,舒江. 见中国工业与应用数学学会第二次大会文集. 上海,1992: 82－85.

On the Functional Differential Equation $x'(t)=A(t)f(x(t),x(x(t)))$

Shi Bao

(Department of System Engineering and Applied Mathematics)

Abstract

In this paper, we studied the asymptotical behaviour of the strong solutions of the Equation:

$$x'(t) = A(t)f(x(t),x(x(t)))$$

and partially generalize the results of Eder[1] and Wang[2], etc..

Key words functional differential equations, strong solutions, maximal strong solutions