

一个  $C^1$  单调保形插值三次样条的构造\*

王兴波

(系统工程与应用数学系)

**摘要** 本文利用三次 Bernstein 多项式构造了一种  $C^1$  单调保形插值三次样条函数。该方法除计算简单外,还能应用于外形设计中且能灵活地调节外形曲线。

**关键词** 单调保形插值,有(无)拐分布,折线偶,Bernstein 偶

**分类号** O242.2

## 1 预备知识

文献 [1] 从代数的角度讨论了保凸插值三次样条的构造,但该方法计算较复杂,不宜应用于外形设计中,本文从三次 Bernstein 多项式的性质入手,构造了一个单调保形的插值三次样条,而且由于引入了控制参数向量:

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

使得本文的方法能在外形设计中方便灵活地控制所设计的曲线的形状,同时可证明:文献 [1] 的方法是本文的一个特例。

## 1.1 几个基本概念的回顾

给定一组型值点:

$$P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n) \quad (1)$$

$$\text{令 } D_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (2)$$

$$\delta_i = D_{i+1} - D_i \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (3)$$

如果  $x_i \leq x_{i+1}$  时,  $y_i \leq y_{i+1}$ , 则称型值点列 (1) 是单调分布的。

$$\text{如果 } \delta_i \delta_{i+1} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (4)$$

则称 (1) 是凸分布的,或无拐分布。

$$\text{如果对 } k \text{ 有 } \delta_k \delta_{k+1} < 0, \quad 1 \leq k \leq n-1 \quad (5)$$

则称 (1) 在  $P_k, P_{k+1}$  是有拐分布。

函数  $S(x)$  如果满足:

1)  $S(x_i) = y_i$ , 则称  $S(x)$  是 (1) 的插值函数。

2) 1)  $D$  单调时,  $S(x)$  满足 1) 且与 (1) 有相同的单调性,是称  $S(x)$  是保单调

\* 1992年4月8日收稿

插值。

3) (1) 是凸分布时,  $S(x)$  满足 1) 且与 (1) 有相同的凸性, 则称  $S(x)$  是保凸插值。

4) (1) 在  $P_k, P_{k+1}$  是有拐分布,  $S(x)$  满足 1) 且在  $[x_k, x_{k+1}]$  内与 (1) 有相同的拐性, 则称  $S(x)$  为保拐插值。

5)  $S(x)$  即保凸又保拐则称  $S(x)$  保形。

由此不难归纳出单调保形插值的定义。

插值样条函数的定义见文献 [3]。

## 1.2 三次 Bernstein 多项式的性质

1°. 保凸性, 见文献 [1]、[3]。

2°. 端点插值性。

$$\text{记: } B(x) = f(0)(1-x)^3 + 3f(1/3)x(1-x)^2 + 3f(2/3)x^2(1-x) + f(1)x^3 \quad x \in [0, 1] \quad (6)$$

$$\text{则有 } B(0) = f(0), B(1) = f(1) \quad (7)$$

3°. 端点切线性质:

$$\text{由 } B'(0) = 3[f(1/3) - f(0)] = \frac{f(1/3) - f(0)}{(1/3) - 0} \quad (8)$$

$$B'(1) = 3[f(1) - f(2/3)] = \frac{f(1) - f(2/3)}{1 - 2/3} \quad (9)$$

知:  $B(x)$  在  $x=0, x=1$  两端点的导数可分别用连接点  $(0, f(0)), (1/3, f(1/3))$  及  $(2/3, f(2/3)), (1, f(1))$  的连线的斜率表示, 如图 1 所示。

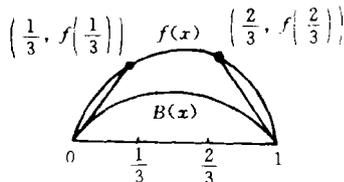


图 1

## 1.3 几个定义

1° 三分中区间, 区间  $[a, b]$  分成三等分, 中间的子区间  $[a + \frac{1}{3}(b-a), a + \frac{2}{3}(b-a)]$  称为三分中区间。

2° 折线角点, 区间  $X$  上两相交线段构成  $X$  上的一折线函数, 交点为折线角点。

3° 折线函数偶:  $\bar{L}(x), \hat{L}(x)$  是  $X$  上的两折线函数, 若存在  $\xi \in x$  使  $\bar{L}(\xi_+) = \hat{L}(\xi_-)$ , 则称  $\bar{L}(x), \hat{L}(x)$  是  $X$  上的一对折线函数偶, 亦称折线偶。

4° Bernstein 函数偶. 由折线偶  $\bar{L}(x), \hat{L}(x)$  构造的 Bernstein 多项式:

$$\bar{B}(x) = \sum_{i=0}^n \bar{L}\left(\frac{i}{n}\right) \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$\hat{B}(x) = \sum_{i=0}^n \hat{L}\left(\frac{i}{n}\right) \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

Bernstein 函数偶亦简称 Bernstein 偶。

## 2 构造

### 2.1 无拐分布的保形插值样条

设  $P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, P_{i+2}$  是给定的四个凸分布的型值点, 现在构造一个三次  $C^1$  连续的函数  $S(x)$  使得:

- (1)  $S(x_i) = y_i$
- (2)  $S(x) \in C^1[x_{i-1}, x_{i+2}]$
- (3)  $S'(x) > 0$ .

由条件 (2) 知  $S(x)$  在  $P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, P_{i+2}$  处存在切线, 不妨分析  $P_i, P_{i+1}$  处, 设过此二点的切线为  $l_i, l_{i+1}$ , 相应斜率为  $m_i, m_{i+1}$ , 由凸分布关系知  $l_i$  必介于  $\overline{P_{i-1}P_i}$  的延长线与  $\overline{P_iP_{i+1}}$  之间,  $l_{i+1}$  介于  $\overline{P_iP_{i+1}}$  的延长线与  $\overline{P_{i+1}P_{i+2}}$  之间, 且  $l_i, l_{i+1}$  有交点  $Q_i$  于是  $P_i, Q_i, P_{i+1}$  构成  $[x_i, x_{i+1}]$  上的折线函数, 记作  $L(x)$ , 其两段分别满足下列两式:

$$y = y_i + m_i(x - x_i) \quad (10)$$

$$y = y_{i+1} + m_{i+1}(x - x_{i+1}) \quad (11)$$

式中,  $m_i, m_{i+1}$  定义为:

$$m_i = D_{i-1} - \alpha_i(D_{i-1} - D_i) \quad (12)$$

$$m_{i+1} = D_i - \alpha_{i+1}(D_i - D_{i+1}) \quad (13)$$

这里  $\alpha_i, \alpha_{i+1}$  为控制参数,  $0 \leq \alpha_i, \alpha_{i+1} \leq 1$ .

易知: 对于  $n$  个型值点便产生了控制向量:

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad (14)$$

由 (10), (11) 可求得折线角点的坐标为:

$$x_i^Q = \frac{y_i - y_{i+1} + x_{i+1}m_{i+1} - x_im_i}{m_{i+1} - m_i} \quad (15)$$

$$y_i^Q = \frac{(x_{i+1} - x_i)m_im_{i+1} + y_im_{i+1} - y_{i+1}m_i}{m_{i+1} - m_i} \quad (16)$$

现在有以下定理

**定理 1** 折线函数  $L(x)$  的三次 Bernstein 多项式  $C^1$  连续于诸型值点的充要条件是: 折线角点的横坐标  $x_i^Q$  落在相应的三分中区间。

**证明** 充分性由 (7), (8), (9) 推出。

必要性: 设  $x_i^Q$  落在相应的前三分之一区间, 不妨设全区间为  $[0, 1]$ , 此时:

$$B'(0) = 3[L(1/3) - L(0)]$$

而  $L(x)$  左边的斜率为  $(L(x_i^Q) - L(0)) / x_i^Q$ , 易知  $L(x)$  在左端不与  $B(x)$  相切, 这同  $C^1$  连续的要求相悖  $x_i^Q$  落在后三分之一区间的情况亦然, 证毕。

根据定理 1 的结论知, 要使折线函数的三次 Bernstein 多项式成为我们所要求的插值函数, 只需该折线角点的  $x_i^Q$  落在相应的三分中区间, 为此, 我们采用折线偶来实现此点, 具体如下:

在折线  $L(x)$  上取两点  $T_i, T_{i+1}$  使:

$$x_i^T = x_i + \lambda(x_i^Q - x_i) \quad (17)$$

$$x_{i+1}^T = x_i^Q + \lambda^*(x_{i+1} - x_i^Q) \quad (18)$$

$$(1/3) \leq \lambda \leq (2/3) \quad \lambda^* = 1 - \lambda$$

得到折线  $P_i T_i T_{i+1}, P_{i+1}$  以  $x = x_i^Q$  将此折线分成两部分:

$$\bar{L}(x) \quad x_i \leq x \leq x_i^Q \quad (19)$$

$$\hat{L}(x) \quad x_i^Q \leq x \leq x_{i+1} \quad (20)$$

则有:

**定理 2** 用折线偶 (19), (20) 构造的三次 Bernstein 偶在  $[x_i, x_{i+1}]$  上是  $C^1$  连续的。

**证明** 由 (17), (18) 知,  $x_i^T$  必在  $[x_i, x_i^Q]$  的三分中区间。  $x_{i+1}^T$  在  $[x_i^Q, x_{i+1}]$  的三分中区间, 由定理 1 知 Bernstein 偶:

$$\bar{B}(x) = \sum_{i=0}^3 \bar{L}\left(\frac{i}{3}\right) \binom{3}{i} t^i (1-t)^{3-i}, \quad t = \frac{x - x_i}{x_i^Q - x_i}$$

$$\hat{B}(x) = \sum_{j=0}^3 \hat{L}\left(\frac{j}{3}\right) \binom{3}{j} t^j (1-t)^{3-j}, \quad t = \frac{x - x_i^Q}{x_{i+1} - x_i^Q}$$

在  $[x_i, x_{i+1}]$  上满足:

$$\bar{B}(x_i) = y_i, \quad \bar{B}'(x_i^+) = \text{slope}(\bar{L}(x_i))$$

$$\bar{B}(x_i^Q + 0) = \hat{B}(x_i^Q - 0), \quad \bar{B}'(x_i^Q + 0) = \hat{B}'(x_i^Q - 0)$$

$$\hat{B}(x_{i+1}) = y_{i+1}, \quad \hat{B}'(x_{i+1}^-) = \text{slope}(\hat{L}(x_{i+1})) \quad (\text{证毕})$$

**定理 3** 无拐分布的型值点 (1) 的  $C^1$  保形插值三次样条函数在  $[x_i, x_{i+1}]$  上可由下式表示:

$$S(x) = \begin{cases} \bar{B}(x), & x_i \leq x \leq x_i^Q \\ \hat{B}(x), & x_i^Q \leq x \leq x_{i+1} \end{cases}$$

## 2.2 有拐分布的单调保形插值样条

设型值点  $P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, P_{i+2}$  是有拐分布的, 我们可分两种情况: 1°. 非单调有拐, 2°. 单调有拐, 如图 2-3 所示。

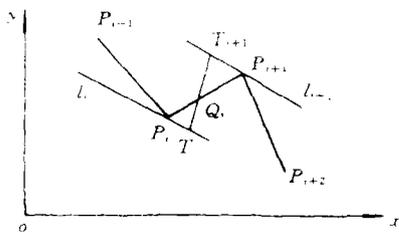


图 2

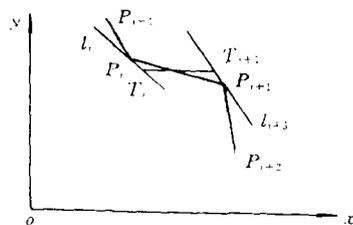


图 3

对 1°, 我们要求构造  $S(x)$  在  $[x_i, x_{i+1}]$  上满足

- (1)  $S(x_i) = y_i$
- (2)  $S(x) \in C^1[x_i, x_{i+1}]$
- (3) 存在  $\xi \in [x_i, x_{i+1}]$  使  $S''(\xi) \leq 0$

对 2° 则要求  $S(x)$  除满足上述 (1), (2), (3) 外, 还应有:

(4) 任意  $x_1 \leq x_2$  都有  $S(x_1) \leq S(x_2)$ ,  $x_1, x_2 \in [x_i, x_{i+1}]$

由于  $S(x)$  在  $P_i, P_{i+1}$  处的切线存在, 我们仍用 (15), (16) 表示, 但此时的折线函数  $L(x)$  不能由  $l_i, l_{i+1}$  的交点确定, 因此我们做以下工作构造  $Q_i$  而得到相应的插值样条  $S(x)$

取  $\lambda$ :  $(1/6) \leq \lambda \leq (1/3)$  (21)

在  $l_i$  上取  $T_i$ :

$$x_i^T = x_i + \lambda(x_{i+1} - x_i), y_i^T = y_i + \lambda(y_{i+1} - y_i) \quad (22)$$

在  $l_{i+1}$  上取  $T_{i+1}$ :

$$x_{i+1}^T = x_i + (1 - \lambda)(x_{i+1} - x_i), y_{i+1}^T = y_i + (1 - \lambda)(y_{i+1} - y_i) \quad (23)$$

$\overline{T_i T_{i+1}}$  交  $\overline{P_i P_{i+1}}$  于  $Q_i$ , 则  $x_i^T$  必在  $[x_i, x_i^Q]$  的份中区间,  $x_{i+1}^T$  在  $[x_i^Q, x_{i+1}]$  的三分中区间, 记折线  $P_i T_i Q_i$  为  $\bar{L}(x)$ ,  $Q_i T_{i+1} P_{i+1}$  为  $\hat{L}(x)$ , 则由折线偶  $\bar{L}(x), \hat{L}(x)$  构造的三次 Bernstein 偶即能达到  $C^1$  保形插值.

如果取  $y_{i+1}^T \geq y_i^T$  (24)

则能得到单调保形的样条函数, 同时有:

**定理 4**  $Q_i$  即为  $S(x)$  在  $[x_i, x_{i+1}]$  内的拐点.

**定理 5**  $S(x)$  不可能在型值点处出现拐点.

### 3 逼近阶的估计

由折线  $L(x)$  的定义知:  $L(x)$  可表示为:

$$L(x) = L(x_k) + S'(x_k)(x - x_k) = S(x_k) + S'(x_k)(x - x_k) \quad (25)$$

为估计收敛阶, 我们先估计  $|L(x) - S(x)|$

$$\begin{aligned} |L(x) - S(x)| &= |S(x_k) + S'(x_k)(x - x_k) - S(x)| \\ &= \frac{1}{2} |S''(\alpha)| |x - x_k|^2, \quad x_k \leq \alpha \leq x \end{aligned} \quad (26)$$

如果  $f(x) \in C'$  则有

$$|f(x) - L(x)| = |f'(\beta) - S'(x_k)| |x - x_k| \quad x_k \leq \beta \leq x \quad (27)$$

如果  $f(x) \in C^2$  则有

$$|f(x) - L(x)| = |f''(\theta) - S''(x_k)| (x - x_k)^2 + \frac{1}{2} f''(\theta) (x - x_k)^2 \quad (28)$$

知关键问题在于  $|f''(x_k) - S''(x_k)|$  及  $|f''(\beta) - S''(x_k)|$ , 由此可归结为  $|f'(x) - S'(x_k)|$ .

由 (12), (13) 及  $S'(x)$  的性质有:

$$D_K \leq S'(x_k) \leq D_{K-1} \quad (29)$$

此亦:  $[x_k, x_{k+1}]f \leq S'(x_k) \leq [x_{k-1}, x_k]f$  (30)

由差商性质知: 如果  $f(x) \in C'$  则存在  $\xi, \xi$  使  $x_{k-1} \leq \xi \leq x_k, \dots, x_k \leq \xi \leq x_{k+1}$  满足:

$$f'(\xi) \leq -S'(x_k) \leq f'(\xi) \quad (31)$$

再由介值定理知必有一点  $\tau$  使

$$S'(x_k) = f'(\tau) \quad \xi \leq \tau \leq \zeta \quad (32)$$

从而 (27) 成为:

$$\begin{aligned} |f(x) - L(x)| &= |f'(\beta) - f'(\tau)| |x - x_k| \text{ 亦即:} \\ |f(x) - L(x)| &\leq \omega(f')h \end{aligned} \quad (33)$$

(28) 式化为:

如果  $f(x) \in C^2$  则

$$\begin{aligned} |f(x) - L(x)| &\leq |f'(x_k) - f'(\tau)| |x - x_k| + \frac{1}{2} |f''(\theta)| |x - x_k|^2 \\ &= |f''(\theta_1)| |x - x_k|^2 + \frac{1}{2} |f''(\theta)| |x - x_k|^2 \\ &\leq \frac{3}{2} \|f''\| h^2 \end{aligned} \quad (34)$$

现在我们有:

**定理 6** 设  $f(x)$  是被插函数,  $S(x)$  是构造的  $C^1$  三次插值样条函数, 记  $R = |f(x) - S(x)|$  有

1°. 如果  $f(x) \in C^1$  则

$$R \leq \left(\frac{1}{2} \|S'\| h + \omega'(f)h\right) = \mathbf{O}(h) \quad (35)$$

2°. 如果  $f(x) \in C^2$  则

$$R \leq \frac{h^2}{2} (\|S''\| + 3 \|f''\|) = \mathbf{O}\left(\frac{h^2}{2}\right) \quad (36)$$

**证明**  $R = |f(x) - S(x)| \leq |f(x) - L(x)| + |L(x) - S(x)| \quad (37)$

如果  $f(x) \in C^1$  则由 (26), (33) 可得 (35)。

如果  $f(x) \in C^2$  则由 (26), (34) 可得 (36)。 (证毕)

#### 4 算法归纳与实例

我们不难归纳出构造  $C^1$  单调保形插值三次样条的算法:

Step1 确定  $\lambda$ , 及控制向量  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

$$1/3 \leq \lambda \leq 2/3$$

Step2 计算  $d_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$

确定边界斜率  $m_1, m_n$  ( $|m_1| > |d_1|$ ,  $|m_n| > |d_n|$ )

并计算  $m_i = d_{i-1} - \alpha_i (d_{i-1} - d_i)$ ,  $i = 2, \dots, n-1$

Step3 计算  $x_j^0 = \frac{y_j - y_{j+1} + x_{j+1} m_{j+1} - x_j m_j}{m_{j+1} - m_j}$

$$y_j^0 = y_j + m_j (x_j^0 - x_j)$$

这里  $j = 1, n-1$

Step4 for  $i = 2$  to  $n-2$  do.

如果  $(d_{i+1}-d_i)(d_i-d_{i-1}) > 0$  则:

1°.  $(15) \Rightarrow x_i^Q, (16) \Rightarrow y_i^Q$

2°.  $x_i^T = x_i + \lambda(x_j^Q - x_i), y_i^T = y_i + \lambda(y_i^Q - y_i)$

$$x_{i+1}^T = x_{i+1} + \lambda(x_i^Q - x_{i+1}), y_{i+1}^T = y_{i+1} + \lambda(y_i^Q - y_{i+1})$$

如果  $(d_{i+1}-d_i)(d_i-d_{i-1}) < 0$  则

如果  $y_{i+1} \geq y_i$  则:

1°. 选择  $y_i^T, y_{i+1}^T$  使  $y_i < y_i^T \leq y_{i+1}^T < y_{i+1}$

2°.  $x_j^T = \frac{y_j^T - y_j}{m_j} + x_j, j=i, i+1.$

$$x_i^Q = x_i + \frac{1}{\lambda}(x_i^T - x_i)$$

$$y_i^Q = y_i + \frac{1}{\lambda}(y_i^T - y_i)$$

3°.  $d_i = \frac{y_{i+1}^T - y_i^T}{x_{i+1}^T - x_i^T}$

否则:

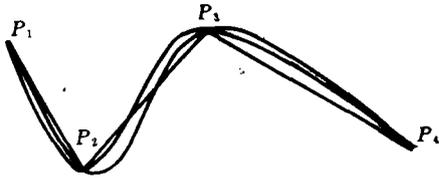


图 4

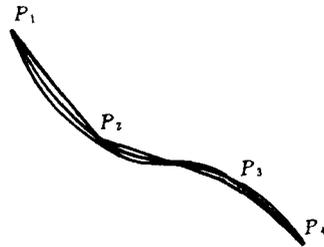


图 5

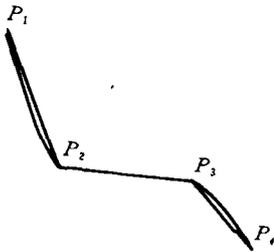


图 6

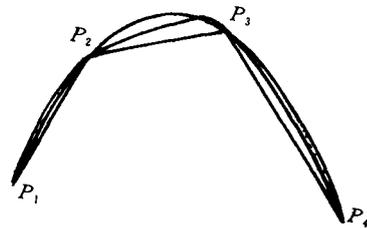


图 7

1°.  $x_j^Q = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, y_i^Q = \frac{y_i + y_{i+1}}{2}$

$$x_i^T = x_i + \lambda(x_i^Q - x_i); y_i^T = y_i + m_i(y_i^T - y_i)$$

$$x_{i+1}^T = 2x_i^Q - x_i^T; y_{i+1}^T = y_{i+1} - m_{i+1}(x_{i+1}^T - x_i^T)$$

2°.  $d_i = \frac{y_{i+1}^T - y_i^T}{x_{i+1}^T - x_i^T}$

$$\text{Step5} \quad \bar{L}(x) = \begin{cases} y_i + m_i(x - x_i) & x_i \leq x \leq x_i^Q \\ y_i^T + d_i(x - x_i^T) & x_i^Q \leq x \leq x_i^Q \end{cases}$$

$$\hat{L}(x) = \begin{cases} y_i^T + d_i(x - x_i^T) & x_i^Q \leq x \leq x_{i+1}^T \\ y_{i+1} + m_{i+1}(x - x_{i+1}) & x_{i+1}^T \leq x \leq x_{i+1} \end{cases}$$

$$\text{Step6} \quad S_i(x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^3 \bar{L}(\frac{k}{3}) \binom{3}{k} t^k (1-t)^{3-k}, t = \frac{x - x_i}{x_i^Q - x_i}, x_i \leq x \leq x_i^Q \\ \sum_{k=0}^3 \hat{L}(\frac{k}{3}) \binom{3}{k} t^k (1-t)^{3-k}, t = \frac{x - x_i^Q}{x_{i+1} - x_i^Q}, x_i^Q \leq x \leq x_{i+1} \end{cases}$$

按此算法在机上实现的情形见图 4-7. 注意  $\alpha$  调节的形状, 最后指出: 如果取  $\alpha_i = \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i}, h_i = x_{i+1} - x_i$  则得到的解即为 Bbssel 插值问题的解, 此亦文献[1]的方法。

### 参 考 文 献

- 1 黄友谦. 曲线曲面的数值表示与逼近. 上海科技出版社, 1984
- 2 程正兴. 数据拟合. 西安交大出版社, 1986
- 3 方遼. 保形的 Hermite 插值样条函数. 国防科技大学学报, 1990, 12(3)

## The Construction of a $C^1$ -monotone Shape-preserving Cubic Spline Interpolation

Wang Xingbo

(Department of Systems Engineering and Applied Mathematics)

### Abstract

Using cubic Bernstein polynomial, this paper gives a construction of  $C^1$ -monotone shape-preserving cubic spline interpolation. The construction is easy to compute and can be applied in shape design.

**Key words** monotonic shape-preserving interpolation, flex-distribution (nonflex-), refractline dual, Bernstein dual