国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第15卷第4期　1993年12月　Vol. 15 No. 4

# 作战指数与火力分配统一处理的方法和意义
## ——兼论数理战术学*

沙基昌

（系统工程与数学系）

**摘　要**　本文将作战指数与火力分配统一放到战场环境中考虑，提出了作战指数与火力分配的合理性条件和合理交战模式、规范交战模式等概念，证明了规范交战模式是合理的，以及在规范交战模式中作战指数与特征向量的关系，文章最后表达了对建立数理战术学的迫切期望.

**关键词**　作战指数，Lanchester 方程，火力分配，战术，交战模式，数理战术学

**分类号**　O212.1

## 1　引　言

作战指数是一个很重要的概念。利用作战指数的方法我们可以方便地比较作战双方的力量对比，预测战斗结局，也可以用于多兵种作战时指导火力分配，以达到最大限度地杀伤敌方的战斗力（即总火力指数）。

但是 Dupuy 提出的确定作战指数的方法以一种非常特定的环境下的作战效果为出发点。从这种特定条件下得到的作战指数要应用到一般的情况，其合理性是值得探讨的。

比较符合实际的改进方法之一则是根据当时实际进行的战斗中各类武器装备和作战单位的作战效果来确定其作战指数[1]。当双方交战的 Lanchester 方程以及双方的火力分配策略确定后，由文献[1]可算出双方各类作战单位的相对火力指数。但是双方的火力分配策略又应如何选取呢？文献[1]最后提出了这样的问题。根据“消灭敌人，保存自己”的原则，火力分配策略的选取应保证能最大限度地杀伤敌人的有生力量，而对敌人有生力量的估计，又要用到敌人的各类作战单位的相对火力指数。于是我们这里将遇到一个循环定义的悖论：确定作战指数需要用到火力分配策略，而确定火力分配策略又要用到作战指数。

解决这一悖论的方法则是不再孤立地、逐个地定义作战指数以及合理的火力分配策略，而是将这两个概念紧密联系在一起，统一定义和处理。

* 1992年6月4日收稿

在多兵种 Lanchester 方程的基础上统一处理作战指数与火力分配策略就是本文讨论的主要内容。

Lanchester 方程是我们定量化研究作战理论的一种重要工具和方法，它有一定局限性，并非普遍适用的，但它毕竟是一种比较成熟的方法。在此基础上对作战指数与火力分配策略统一处理的方法对于一般情况下的研究将有借鉴作用，而得到的结论之战术意义也可能有一定的普遍性。

## 2 交战模式的定义

**定义 1** 一个“$m$ 对 $n$ 战斗格局”是指二元组（$A$，$B$），其中

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

分别为 $n\times m$ 与 $m\times n$ 正矩阵。二元组（$A$，$B$）又简称为“$m$ 对 $n$ 格局”，“战斗格局”或“格局”。

与格局（$A$，$B$）相联系的战斗过程 Lanchester 方程为

$$\begin{cases} \dot{y}=-(A*\Phi)x \\ \dot{x}=-(B*\Psi)y \end{cases} \tag{1}$$

其中甲方共有 $m$ 类作战单位 $X_1$，$X_2$，…，$X_m$，乙方共有 $n$ 类作战单位 $Y_1$，$Y_2$，…，$Y_n$；$x=(x_1,\cdots,x_m)^T$，$y=(y_1,\cdots,y_n)^T$ 分别为甲、乙双方的实力向量，即 $x_i$ 为甲方第 $i$ 类作战单位 $X_i$ 的个数，$y_j$ 为乙方第 $j$ 类作战单位 $Y_j$ 的个数；

$$\Phi=\begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1m} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{nm} \end{bmatrix}\qquad \Psi=\begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \cdots & \psi_{1n} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \cdots & \psi_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_{m1} & \psi_{m2} & \cdots & \psi_{mn} \end{bmatrix}$$

分别为 $n\times m$ 与 $m\times n$ 非负矩阵，称为双方的火力分配矩阵，$\phi_{ji}$表示 $X_i$ 用于攻击 $Y_j$ 的比例，而 $\psi_{ij}$表示 $Y_j$ 用于攻击 $X_i$ 的比例，因此，$\Phi$ 与 $\Psi$ 必定满足下列条件：

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n}\phi_{ji}\leqslant 1, & i=1,\cdots,m \\ \sum_{i=1}^{m}\psi_{ij}\leqslant 1, & j=1,\cdots,n \end{cases} \tag{2}$$

“$*$”表示矩阵中对应元素相乘，即

$$A*\Phi=\begin{bmatrix} a_{11}\phi_{11} & a_{12}\phi_{12} & \cdots & a_{1m}\phi_{1m} \\ a_{21}\phi_{21} & a_{22}\phi_{22} & \cdots & a_{2m}\phi_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}\phi_{n1} & a_{n2}\phi_{n2} & \cdots & a_{nm}\phi_{nm} \end{bmatrix}$$

$$B*\Psi=\begin{pmatrix}b_{11}\psi_{11} & b_{12}\psi_{12} & \cdots & b_{1n}\psi_{1n}\\ b_{21}\psi_{21} & b_{23}\psi_{23} & \cdots & b_{2n}\psi_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{m1}\psi_{m1} & b_{m2}\psi_{m2} & \cdots & b_{mn}\psi_{mn}\end{pmatrix}$$

设乙方对甲方各类作战单位的相对作战指数估计向量为 $u=(u_1,\cdots,u_m)^T$，甲方对乙方各类作战单位的相对作战指数估计向量为 $v=(v_1,\cdots,v_n)^T$. 即乙方认为甲方每个 $X_i$ 作战单位的相对作战指数为 $u_i$，而甲方认为乙方每个 $Y_j$ 作战单位的相对作战指数为 $v_j$. 其中 $u$、$v$ 为正向量，即

$$\begin{cases}u_i>0, & i=1,2,\cdots,m,\\ v_j>0, & j=1,2,\cdots,n.\end{cases}$$

**定义 2** 四元组$(u,v,\Phi,\Psi)$称为 $m$ 对 $n$ 战斗格局（$A$，$B$）下的“交战模式”，其中 $u$，$v$ 分别为 $m$ 维正向量与 $n$ 维正向量，$\Phi$，$\Psi$ 分别为满足条件(2)的 $n\times m$ 与 $m\times n$ 非负矩阵。

交战模式$(u,v,\Phi,\Psi)$中既包含了双方的火力分配策略，又包含了对对方相对作战指数的估计，因此比较完整地反映了交战过程中的双方的对策。从双方都是理智的局中人出发，都能合理地估计对方的相对火力指数，并都企图最大限度地杀伤对方的总火力指数这一原则出发，我们可以分析交战模式的合理性条件。

## 3 合理交战模式

在 $m$ 对 $n$ 战斗格局（$A$，$B$）的交战模式$(u,v,\Phi,\Psi)$下，双方的总火力指数为

$$\begin{cases}U=u^Tx=\sum_{i=1}^{m}u_ix_i,\\ V=v^Ty=\sum_{j=1}^{n}v_jy_j.\end{cases}$$

而双方总火力指数的被毁率分别为

$$\begin{cases}\dot U=\sum_{i=1}^{m}u_i\dot x_i=u^T\dot x=-u^T(B*\Psi)y\\ \quad=-\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{m}u_ib_{ij}\psi_{ij}\Big)y_j\\ \dot V=\sum_{j=1}^{m}v_j\dot y_j=v^T\dot y=-v^T(A*\Phi)x\\ \quad=-\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n}v_ja_{ji}\phi_{ji}\Big)x_i\end{cases}\tag{3}$$

因 $\Phi$，$\Psi$ 为满足(2)的非负矩阵，故为使 $\dot U$ 达到最大，$Y_j$ 攻击的对象 $X_i$ 应使 $u_ib_{ij}$达到最大，且这时应取 $\psi_{ij}=1$. 同样地，为使 $\dot V$ 达到最大，$X_i$ 攻击的对象 $Y_j$ 应使 $v_ja_{ji}$达到最大，且这时应取 $\phi_{ji}=1$.

于是合理性条件中的第一条可以表述为 $\Phi$、$\Psi$ 是列和为 1 的 0－1 矩阵，且满足

$$\begin{cases}\text{对于每一个 } i \in \{1,\cdots,m\}\text{，若 } \phi_{ji} = 1\text{，则} \\ \qquad v_j a_{ji} = \max\limits_{1 \leqslant j' \leqslant n} v_{j'} a_{j'i} \\ \text{对于每一个 } j \in \{1,\cdots,n\}\text{，若 } \psi_{ij} = 1\text{，则} \\ \qquad u_i b_{ij} = \max\limits_{1 \leqslant i' \leqslant m} u_{i'} b_{i'j} \end{cases}$$

当然，例如如果对某一个 $i$，同时有 $j_1$ 与 $j_2$ 使 $v_j a_{ji}$ 达到最大，这时使 $X_i$ 同时攻击 $Y_{j1}$ 与 $Y_{j2}$ 而保持 $\phi_{j1i}+\psi_{j2i}=1$ 也可以使 $V$ 达到最大，但为了讨论方便起见，我们这里假设选定其中一个 $Y_{j1}$ 或 $Y_{j2}$ 作为 $X_i$ 的攻击对象。

合理性条件的第二个方面是关于相对作战指数的估计。假定 $X_i$ 用于攻击 $Y_j$，于是每一个 $X_i$ 作战单位造成 $Y_j$ 的损失率为 $a_{ji}$，若这时 $X_{i'}$ 也用于攻击 $Y_j$，则每一个 $X_{i'}$ 作战单位造成 $Y_j$ 的损失率为 $a_{ji'}$. 如果认为每个 $X_i$ 作战单位与每个 $X_{i'}$ 作战单位的作战指数正比于它所造成的 $Y_j$ 的损失率是合理的，即

$$\frac{u_i}{u_{i'}} = \frac{a_{ji}}{a_{ji'}}$$

或

$$u_i = \frac{a_{ji}}{a_{ji'}} u_{i'} \tag{4}$$

但是，一般地，$X_{i'}$ 并不用于攻击 $Y_j$，而用于攻击 $Y_{j'}$，这时可以认为如果将 $X_{i'}$ 改为攻击 $Y_j$ 的话，将导致降低 $X_{i'}$ 的实际作战指数。换言之，(4)式中的 $u_{i'}$ 通常应小于实际的 $u_{i'}$. 于是，将真正的 $X_{i'}$ 的作战指数代入后，(4)式应改为

$$u_i \leqslant \frac{a_{ji}}{a_{ji'}} u_{i'}$$

对于 $v$，类似的分析也是适用的，于是合理性条件之二可表示为：

$$\begin{cases}\text{对于每一个 } i \in \{1,\cdots,m\}\text{，若 } \phi_{ji} = 1\text{，则} \\ \qquad u_i \leqslant \dfrac{a_{ji}}{a_{ji'}} u_{i'}\text{，} i' \in \{1,\cdots,m\}\text{，} \\ \text{对于每一个 } j \in \{1,\cdots,n\}\text{，若 } \psi_{ij} = 1\text{，则} \\ \qquad v_j \leqslant \dfrac{b_{ij}}{b_{ij'}} v_{j'}\text{，} j' \in \{1, =, n\} \end{cases} \tag{5}$$

**定义 3** $m$ 对 $n$ 战斗格局 $(A, B)$ 下的交战模式$(u,v,\Phi,\Psi)$称为“合理的”是指：$\Phi$、$\Psi$ 是列和为 1 的 0—1 矩阵，并满足(3)，而 $u$，$v$ 满足(5).

## 4 规范交战模式及其与特征向量间的关系

合理交战模式中条件(5)的定义是个不等式关系，因而限制较松散。不难验证，对于许多格局 $(A, B)$，合理交战模式不是唯一的。

我们可进一步加强条件(5)，而对交战模式进行限制。这就是下面将要定义的规范交战模式。可以证明，在一定意义下，规范交战模式是唯一的，但这点已超出了本文的范围。

假定 $Y_j$ 用于攻击 $X_i$，则每一个 $Y_j$ 单位造成甲方总火力指数的损失率为 $u_i b_{ij}$. 如果认为每一个 $Y_i$ 单位的作战指数与其造成的甲方总火力指数的损失率成正比，即存在正常

数 $\nu$，使得 $v_j=\nu u_i b_{ij}$，则将导致如下定义：

**定义 4**　$m$ 对 $n$ 战斗格局（$A$，$B$）下的交战模式$(u,v,\Phi,\Psi)$称为“规范的”是指：$\Phi$、$\Psi$ 是列和为 1 的 0－1 矩阵，并满足(3)，且存在正常数 $\mu$、$\nu$，使得 $u$、$v$ 满足

$$\begin{cases}\text{对于每一个 } i \in \{1,\cdots,m\}\text{，若 } \phi_{ji} = 1\text{，则} \\ \qquad u_i = \mu v_j a_{ji}, \\ \text{对于每一个 } j \in \{1,\cdots,n\}\text{，若 } \psi_{ij} = 1\text{，则} \\ \qquad v_j = \nu u_i b_{ij}\end{cases} \tag{6}$$

**定理 1**　规范交战模式是合理的。

**证明**　设$(u,v,\Phi,\Psi)$为格局（$A$，$B$）下的规范交战模式。对于任一 $i\in\{1,\cdots,m\}$以及 $i'\in(1,\cdots,m)$，设 $\phi_{ji}=1$，$\phi_{j'i'}=1$. 则依(6)

$$u_i = \mu v_j a_{ji}$$

$$u_{i'} = \mu v_{j'} a_{j'i'}$$

依条件(3)，其中的 $i$ 与 $j$ 分别用此处的 $i'$ 与 $j'$ 代替，便有

$$v_{j'} a_{j'i'} \geqslant v_j a_{ji'}$$

因此
$$u_i = \frac{u_j a_{ji}}{v_{j'} a_{j'i'}} u_{i'} \leqslant \frac{v_j a_{ji}}{v_j a_{ji'}} u_{i'} = \frac{a_{ji}}{a_{ji'}} u_{i'} \qquad i = 1,\cdots,m$$

对 $v_j$ 也可类似地证明之，故(5)式也能成立，即$(u,v,\Phi,\Psi)$也是合理交战模式。

**定理 2**　设$(u,v,\Phi,\Psi)$是 $m$ 对 $n$ 格局（$A$，$B$）下的规范交战模式。令 $G=A*\Phi$，$H=B*\Psi$，则 $u^T$ 是 HG 的左特征向量，而 $v^T$ 是 GH 的左特征向量。

**证明**　设按规范作战模式$(u,v,\Phi,\Psi)$，$X_i$ 攻击 $Y_{j(i)}$，$Y_j$ 攻击 $X_{i(j)}$，即

$$\phi_{j(i),i} = 1, \qquad i = 1,\cdots,m$$

$$\psi_{i(j),j} = 1, \qquad j = 1,\cdots,n$$

于是 $G=A*\Phi$ 的第 $i$ 列元素中唯一的非零项为第 $j(i)$个，且其值为 $a_{j(i),i}$. 因此 $v^TG$ 的第 $i$ 个元素就是 $v_{j(i)}a_{j(i),i}$. 按定义 4 中的(6)式，这就是 $u_i/\mu$. 因此

$$v^TG = u^T/\mu$$

同样地可证

$$u^TH = v^T/\nu$$

因此
$$u^T\mathrm{HG} = v^T/\nu \cdot G = u^T/\mu\nu$$

$$v^T\mathrm{GH} = u^T/\mu \cdot H = v^T/\mu\nu$$

即 $u^T$，$v^T$ 分别是 HG 与 GH 的左特征向量。

## 5　数理战术学

上文中提出的合理交战模式与规范交战模式将作战指数与火力分配联系起来考虑。虽然本文只是一个开头，但按此思路可以用于研究多兵种与多兵种交战中的战术，其中的一系列结论对于定性的分析结果不仅是很好的补充和精确化，同时也将是进一步的深化。

每一次抽象都会与实际有一定的距离，然而科学的抽象则更能反映本质。数学与经济的结合产生了数理经济学，对于经济学是重要的发展，有深刻的指导意义。数学与战

术的结合同数学与经济的结合相比，可能更为困难，但其意义并不更小。数理经济学必然会发展的，它能更深刻地反映一些战术本质，并对战术学的发展起到一定的指导作用，这一点也必将逐渐为人们所认识。

## 参 考 文 献

1 沙基昌. Lanchester 方程与火力指数的内在联系. 国防科技大学学报，1990，(3)：8～14

# The Methods and its Significance in Treating Fire Indexes and Fire Assignments in a United Way

Sha Jichang

(Department of System Engineering and Mathematics)

**Abstract**

In this paper, fire indexes and fire assignments are put into a battle situation. Some reasonable rules for fire indexes and fire assignments and some concepts such as reasonable fire patterns and normal fire patterns are raised. Normal fire patterns are proved to be reasonable. Some relationship between fire indexes in a normal fire pattern and characteristic vectors is revealed. It is desired to create mathematical tactics, which is expressed at the end of this paper.

**Key words** fire indexes, Lanchester equations, fire assignments, tactics, fire patterns, mathematical tactics