国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第15卷第4期 1993年12月 Vol. 15 No. 4

一类极小能控制与广义样条函数*

张新建 方 逵

（系统工程与数学系）

摘 要 本文讨论由一般微分方程确定的时不变线性系统的一类极小能控制问题。首先，通过引入降阶逆向系统揭示了原系统的输入与输出是由某个积分－微分算子联系着的，并利用该算子建立了极小能控制与广义样条的联系；然后在对于输出端的一类较广泛的约束条件下，导出了其输出空间与文[1]的输出空间具有类似的构造性质，从而建立了与文[1]类似的投影公式与递推公式。

关键词 降阶逆向系统，积分－微分算子，极小能控制，广义样条，递推公式

分类号 O241.4

已有许多文献用样条理论的观点来考虑在输出端加有线性泛函约束的线性系统的极小能控制问题[1]~[4]，指出了如果所给系统是由极小能控制驱动的，则系统的输出就是满足线性泛函约束的广义插值样条，并从这种对应关系出发在很一般的约束条件下得到求极小能控制的简单公式。正如文[2]所指出的，在求解这种极小能控制时，样条理论方法与经典的方法（Hamilton-Jacobi 理论）相比，在概念和计算上都带来了简化。

对于由一个微分算子确定的线性系统的极小能控制问题，笔者推广了文[2]的理论并建立了实用的递推公式[1]。本文考虑更一般的由两个微分算子确定的线性系统的极小能控制问题。

1 微分系统的降阶逆向系统

设由微分方程确定的线性时不变系统为

$$Lf(t) = Mu(t),\ t \in [0,1] \tag{1}$$

其中 $L=D^n+\sum_{j=0}^{n-1}a_jD^j$，$M=\sum_{j=0}^{m}c_jD^j$ $(c_m\neq 0,\ m<n)$.

系统(1)可写为状态变量形式

$$\begin{cases} \dot{\omega} = A\omega + \tilde{b}u \\ f = \tilde{c}\omega \end{cases} \tag{2}$$

其中

---

* 1992年5月26日收稿

$$A=\begin{pmatrix}0 & & I \\ -a_0 & -a_1\cdots & -a_{n-1}\end{pmatrix}$$

$$\tilde{b}=(0,\cdots,0,1)', \quad \tilde{c}=(c_0,c_1,\cdots,c_m,0,\cdots,0)$$

设 $Q=(\tilde{c}',A'\tilde{c}',\cdots,(A')^{n-1}\tilde{c}')$，用 $x=Q\omega$ 代入(2)，则可得

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+bu(t)\\ f(t)=cx(t)\end{cases} \tag{3}$$

其中

$$c=(1,0,\cdots,0), \quad b=(0,\cdots,0,b_\alpha,\cdots,b_n)'$$

$$\alpha=n-m, \quad b_\alpha=c_m$$

$$b_{\alpha+j}=c_{m-j}-\sum_{k=0}^{j-1}a_{n-j+k}b_{\alpha+k}, \quad 1\leqslant j\leqslant m$$

由文[5]可求得系统(3)的降阶逆向系统为 m 阶系统：

$$\begin{cases}\dot{\theta}(t)=\hat{A}\theta(t)+\hat{B}F(t)\\ u(t)=\hat{c}\theta(t)+\hat{d}f^{(\alpha)}(t)\end{cases} \tag{4}$$

其中

$$\hat{b}=(b_{\alpha+1},\cdots,b_n)'$$

$$\theta=(x_{\alpha+1},\cdots,x_n), \quad \hat{A}=A_{22}-b_\alpha^{-1}\hat{b}e_1'$$

$$\hat{B}=(A_{21},b_\alpha^{-1}\hat{b}), \quad \hat{c}=-b_\alpha^{-1}e_1', \quad \hat{d}=b_\alpha^{-1}$$

$$F=(f,f^{(1)},\cdots,f^{(\alpha)})', \quad e_1'=(1,0,\cdots,0)$$

$$A=\begin{array}{c@{}c}\begin{array}{cc}\alpha & n-\alpha\end{array} & \\ \begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix} & \begin{array}{l}\alpha\\ n-\alpha\end{array}\end{array}, \quad A \text{ 如系统(2).}$$

不妨设 $\theta(t_0)=0$，则对应有

$$x(t_0)=(f(t_0),\cdots,f^{(\alpha-1)}(t_0),0,\cdots,0)' \tag{5}$$

这样，对于系统(3)的每一个输出 f，其相应的输入 u 可通过系统(4)而得到。

系统(4)可写成

$$u=Tf \tag{6}$$

其中 T 是从 H^α 到 $L^2[0,1]$的线性有界积分-微分算子，这里

$$H^\alpha=\{f(t),\ t\in[0,1):\ f^{(\alpha)}\text{a.e.存在，且}\int_0^1|f^{(\alpha)}|^2<\infty\}$$

2 极小能控制与广义样条

设$\{\lambda_j\}_1^N(N\geqslant n)$是 H^α 上一组线性无关的连续泛函，$\{r_j\}_1^N$ 是一组实数。记

$$U(r)=\{f\in H^\alpha:\ \lambda_jf=r_j,\ 1\leqslant j\leqslant N\}$$

现在我们希望在迫使输出 f 满足约束

$$\lambda_jf=r_j,\ 1\leqslant j\leqslant N \tag{7}$$

的条件下，得到系统(4)或(6)的极小能输入 u^*，即

$$\int_0^1(u^*)^2=\min_{f\in U(r)}\int_0^1(Tf)^2 \tag{8}$$

定义 如果存在 $s\in U(r)$，满足

$$u^* = Ts \tag{9}$$

则称 s 为关于 $\{\lambda_j\}_1^N$ 插值 $\{r_j\}_1^N$ 的广义样条函数。我们称为 LM-g 样条[4]。

由此知，极小能控制 u^* 与 LM-g 样条是一对“输入-输出”。

由文[1]、[4]知，上述 LM-g 样条 s 总是存在的，且 s 是唯一的充要条件为 $\{\lambda_j\}_1^a$ 在 T 的零空间 $N(T)$ 上线性无关。以下我们假定该唯一性条件总是满足的。

3 投影描述

以下我们限定 $\{\lambda_j\}_1^N$ 是一类所谓推广的 Hermite-Birkhoff 泛函，其形式为

$$\lambda_j f = \sum_{k=1}^{a} \gamma_{jk} f^{(k-1)}(t_j),\ 1 \leqslant j \leqslant N \tag{10}$$

其中 $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_N \leqslant 1$，$\{\gamma_{jk}\}$ 为已知实数。

由(3)可知，对任意 $f \in H$，有

$$f(t) = c\phi(t)x(0) + \int_0^t c\phi(t-\tau)bu(\tau)d\tau \tag{11}$$

其中 $\phi(t) = \exp(At)$. 再记 $\Gamma_j = (\gamma_{j1}, \cdots, \gamma_{ja}, 0, \cdots, 0)$，则由(3)、(10)和(11)知

$$\lambda_j f = \Gamma_j x(t_j)$$

$$\lambda_j f = \Gamma_j \phi(t_j)x(0) + \int_0^{t_j} \Gamma_j \phi(t_j - \tau)bu(\tau)d\tau \tag{12}$$

设由 $\alpha \times n$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} \Gamma_1 \phi(t_1) \\ \vdots \\ \Gamma_a \phi(t_a) \end{pmatrix}$$

的前 α 列组成的 $\alpha \times \alpha$ 矩阵为 W，再设 $\Delta(\cdot)$ 是一个 $\alpha \times n$ 矩阵，其第 i 行 $\Delta_i(\cdot)$ 为

$$\Delta_i(t) = \begin{cases} \Gamma_i \phi(t_i - t),\ t \in [0,\ t_i] \\ 0, \qquad\qquad \text{其它} \end{cases}$$

记 $x_0 = (x_1(0), \cdots, x_a(0))'$，$\eta = (\lambda_1 f, \cdots, \lambda_a f)'$，则由(12)有

$$\eta = Wx_0 + \int_0^{t_a} \Delta(\tau)bu(\tau)d\tau \tag{13}$$

由文[6]知 W 可逆，从而得

$$x_0 = W^{-1}\eta - W^{-1}\int_0^{t_a} \Delta(\tau)bu(\tau)d\tau \tag{14}$$

将(14)代入(11)，且注意到(5)，有

$$f(t) = \sum_{j=1}^{a} (\lambda_j f)z_j(t) - z'(t) \int_0^{t_a} \Delta(\tau)bu(\tau)d\tau + \int_0^t c\phi(t-\tau)bu(\tau)d\tau$$

其中

$$z'(t) = (z_1(t), \cdots, z_a(t)) = c\phi(t)\begin{pmatrix} W^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

设
$$g(t-\tau) = \begin{cases} c\phi(t-\tau)b,\ t \geqslant \tau \\ 0, \qquad\qquad t < \tau \end{cases}$$

$$G(t,\tau) = g(t-\tau) - z'(t)\Delta(\tau)b \tag{16}$$

再注意到(6)，则 $f(t)$可写成

$$f(t) = \sum_{j=1}^{\alpha}(\lambda_j f)z_j(t) + \int_0^1 G(t,\tau)[Tf(\tau)]d\tau \tag{17}$$

可以验证

$$Tz_j = 0,\ \lambda_i z_j = \begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases} \quad 1\leqslant i,j\leqslant \alpha \tag{18}$$

$$TG(\cdot,\tau) = \delta(\tau-\cdot),\ \lambda_j G(\cdot,\tau) = 0,\ 1\leqslant j\leqslant \alpha \tag{19}$$

即$\{z_j\}_1^\alpha$是$N(T)$的对偶于$\{\lambda_j\}_1^\alpha$的基底，$G(\cdot,\cdot)$为T的 Green 函数。

由于(17)、(18)和(19)式成立，则完全类似于文[1]可得到下述结论：

结论 1 H^α 中可引入下述内积与范数

$$\langle e,f\rangle = \sum_{j=1}^{\alpha}(\lambda_j e)(\lambda_j f) + \int_0^1 (Te)(Tf)$$

$$\| f \|^2 = \sum_{j=1}^{\alpha}(\lambda_j f)^2 + \int_0^1 (Tf)^2$$

结论 2 H^α 具有再生核

$$K(t,\tau) = \sum_{j=1}^{\alpha} z_j(t)z_j(\tau) + \int_0^1 G(t,\xi)G(\tau,\xi)d\xi \tag{20}$$

设$\{\lambda_j\}_1^N$在H^α中的表示为$\{h_j\}_1^N$，则

$$h_j = z_j(1\leqslant j\leqslant \alpha),\ h_j = \lambda_j K\ (1\leqslant j\leqslant N)$$

结论 3 满足(8)、(9)的 LM-g 样条s是$U(r)$中任意元素在$S=\mathrm{Span}\{h_j,\ 1\leqslant j\leqslant N\}$上的投影。由此可得

$$s(t) = h'(t)R^{-1}r$$

其中

$$h' = (h_1,\cdots,h_N),\ r = (r_1,\cdots,r_N)'$$

$R = (\langle h_i,\ h_j\rangle)N$ 阶对称矩阵

结论 4 极小能控制u^*是$TU(r)$中任意元素在$(TS^\perp)^\perp$上的投影；$\{\lambda_j G(\cdot,t)\}_{\alpha+1}^N$是$(TS^\perp)^\perp$的一组基底。由此可得公式

$$u^* = g'(t)H^{-1}\hat{r} \tag{21}$$

其中

$$g'(t) = (\lambda_{\alpha+1}G(\cdot,t),\cdots,\lambda_N G(\cdot,t)) \tag{22}$$

$$\hat{r}' = \left(r_{\alpha+1} - \sum_{j=1}^{\alpha} r_j(\lambda_{\alpha+1}z_j),\cdots,r_N - \sum_{j=1}^{\alpha} r_j(\lambda_N z_j)\right) \tag{23}$$

$$H = \int_0^1 g(t)\cdot g'(t) \tag{24}$$

4 递推公式

类似于文[1]可导出下述递推公式。

第一步：取 $\tilde{h}_i = z_i$ $(1\leqslant i\leqslant \alpha)$，计算

$$v_{\alpha+1,i} = \lambda_{\alpha+1}\tilde{h}_i,\ 1 \leqslant i \leqslant \alpha$$

$$\hat{f}_{\alpha+1}(t) = \lambda_{\alpha+1}G(\cdot,t)$$

$$d_{\alpha+1} = [\lambda_{\alpha+1}\lambda_{\alpha+1}k(\cdot,\cdot) - \sum_{i=1}^{\alpha} v_{\alpha+1,i}^2]^{1/2}$$

$$\tilde{h}_{\alpha+1} = d_{\alpha+1}^{-1}[\lambda_{\alpha+1}k(\cdot,t) - \sum_{i=1}^{\alpha} v_{\alpha+1,i}\tilde{h}_i(t)]$$

第二步：对 $j=\alpha+2$，$\alpha+3$，…，N，循环递推计算

$$v_{ji} = \lambda_j\tilde{h}_i,\ 1 \leqslant i \leqslant \alpha$$

$$v_{ji} = d_i^{-1}[\lambda_j\lambda_i k(\cdot,\cdot) - \sum_{k=1}^{i-1} v_{ik}v_{jk}],\ \alpha + 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant j - 1$$

$$\hat{f}_j(t) = \lambda_j G(\cdot,t) - \sum_{i=\alpha+1}^{j-1} v_{ji}d_i^{-1}\hat{f}_i(t)$$

$$d_j = [\lambda_j\lambda j_j k(\cdot,\cdot) - \sum_{i=1}^{j-1} v_{ji}^2]^{1/2}$$

$$\tilde{h}_j(t) = d_j^{-1}[\lambda_j k(\cdot,t) - \sum_{i=1}^{j-1} v_{ji}\tilde{h}_i(t)]$$

第三步：取 $\tilde{r}_i=r_i$（$1\leqslant i\leqslant\alpha$），对 $j=\alpha+1$，$\alpha+2$，…，N，递推地计算

$$\tilde{r}_j = d_j^{-1}\left[r_j - \sum_{i=1}^{j-1} v_{ji}\tilde{r}_i\right]$$

第四步：得 LM-g 样条 s 与极小能控制 u^* 为

$$s(t) = \sum_{j=1}^{N}\tilde{r}_j\tilde{h}_j(t) \tag{25}$$

$$u^*(t) = \sum_{j=\alpha+1}^{N}\tilde{r}_j d_j^{-1}\hat{f}_j(t) \tag{26}$$

上述递推式的主要优点是：

（1）在求得了 Green 函数 G 与再生核 K 后，递推式中没有微分、积分、矩阵求逆等复杂运算。特别当约束泛函为赋值泛函时，递推式中只含简单的赋值运算；

（2）当系统给定后，G 与 K 即被确定。因此，当约束条件增加（即 N 增大）时，无需重新计算任何东西，只需继续递推；

（3）$\{\tilde{r}_j\}_1^N$ 是独立计算的，有利于约束条件的更改与修正；

（4）实现了 u^* 与 s 同步递推。

5 举 例

考虑系统

$$Lf(t) = Mu(t),\ t \in [0,1]$$

其中 $L=D^2$，$M=D+1$. 设 $\lambda_j f=f(t_j)$，$j=1,2$. 求由(8)定义的极小能控制 u^*.

这里 $\alpha=1$，$N=2$. 由逆向系统(4)可知算子 T 为

$$Tf(t) = \hat{f}(t) - \int_0^t e^{-(t-\tau)}\hat{f}(\tau)d\tau$$

由(15)、(16)知 $z_1=1$ 及

$$G(t,\tau)=\begin{cases}t-t_1, & t\geqslant\tau,\ \tau\leqslant t_1\\ 1+t-\tau, & t\geqslant\tau,\ \tau>t_1\\ \tau-t_1-1, & t<\tau,\ \tau\leqslant t_1\\ 0, & t<\tau,\ \tau>t_1\end{cases}\tag{27}$$

再由(22)、(23)与(24)知

$$g(t)=\lambda_2 G(\cdot,t)=\begin{cases}t_2-t_1, & t\leqslant t_1\\ 1+t_2-t, & t_1<t\leqslant t_2\\ 0, & t>t_2\end{cases}\tag{28}$$

$$\hat{r}=(r_2-r_1)$$

$$H=\int_0^1 h^2(t)dt=\frac{1}{3}[(1+t_2-t_1)^3-1]+t_1(t_2-t_1)^2$$

于是由 (21) 得

$$u^*(t)=\begin{cases}H^{-1}(r_2-r_1)(t_2-t_1), & t\leqslant t_1\\ H^{-1}(r_2-r_1)(1+t_2-t), & t_1<t\leqslant t_2\\ 0, & t>t_2\end{cases}\tag{29}$$

若用递推式求解，则需求出再生核。由(20)、(27)可得再生核

$$K(s,t)=K(t,s)=\begin{cases}(s-t_1)\left[t(t-t_1)+\frac{1}{2}(s-t)(s+t-2t_1-2)\right]\\ \qquad -\frac{1}{3}[(s-t_1-1)^3+1]+1, & t<s\leqslant t_1\\ (s-t_1)(t-t_1)\left[t+\frac{1}{2}(t_1+2-t)\right]+1, & t\leqslant t_1<s\\ (t-t_1)\left[t_1(s-t_1)+(1+t)(1+s)-\frac{1}{2}(t+t_1)(t+s+2)\right]\\ \qquad +\frac{1}{3}(t^3-t_1^3)+1, & t_1<t<s\end{cases}$$

再由递推式依次求得

$$\tilde{h}_1=z_1=1,\ v_{21}=\lambda_2\tilde{h}_1=1$$

$$\hat{f}_2(t)=\lambda_2 G(\cdot,t)=g(t)\quad(\text{见}(28)\text{式})$$

$$d_2^2=\lambda_2\lambda_2 k-1=\frac{1}{3}[(1+t_2-t_1)^3-1]+t_1(t_2-t_1)^2$$

$$\tilde{r}_2=d_2^{-1}(r_2-r_1)$$

于是由(26)式即可得 u^*，结果与(29)式一样。

参 考 文 献

1 张新建. 最小能量控制与Lg样条函数. 应用数学，1991，4(4)：16～21

2 H L Weinert and T Kailath. A Spline Theoretic Approach to Minimum-Energy Control. IEEE Trans. Automatic Control，1976，AC-21：391～393

3 A N Netravali，R J P de Figueiredo. On a Class of Minimum-Energy Control to Spline Functions. IEEE Trans. Automatic Control，1976，AC-21：725～727

4 R J P de Figueiredo. LM-g Splines. J. Approx. Theory, 1977, 19(4): 332~360

5 L M Silverman. Properties and Applications of Inverse Systems. IEEE Trans. Automatic Control. 1968, AC-13: 436~437

6 H L Weinert and G S Sidhu. On Uniqueness Conditions for Optimal Curve Fitting. J. Optimization Theory Appl. 1977, 23: 211~216

On a Class of Minimum Energy Controls and Generalized Splines

Zhang Xinjian Fang Kui

(Department of System Engineering and Mathematics)

Abstract

In this paper, the problem of minimum-energy control of linear systems determined in terms of two differential operators is investigated. By introducing the reduced-order inverse of the system discussed in this paper, we reveal that the input and output of the system are connected by a integro-differential operator. This operator is used to define the correspondence between the optimal controls and certain generalized splines. Finally, the formulas and the recursive algorithm, similar to those in [1], for the optimal controls and the generalized splines are obtained.

Key words reduced-order inverse, integro-differential operators, minimum-energy controls, generalized splines, recursive algorithm