国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第16卷第1期　1994年3月　Vol. 16 No. 1

非标准分析与概率论*

金治明

（国防科技大学系统工程与数学系　长沙　410073）

摘　要　本文概述了非标准分析发展的简史，介绍了超实数系，导数的非标准表示，并举例说明了数学命题的非标准证明比标准证明更为简洁、直观。文章的后一部分介绍了loeb概率空间以及概率积分的*有限求和的表示，并指出概率论从本质上是初等的结论。

关键词　非标准分析，loeb概率空间，*有限求和

分类号　O141.41，O211

300多年前牛顿用流数法，莱布尼茨用无穷小方法同时创立了微积分。牛顿的流数法实质上是把导数看成是增量之比的极限，而作为哲学家的莱布尼茨倾向于物质构成的“最终微粒”，他把导数看成是无穷小增量的比（即微商），大数学家Euler和Bernoulli也都倾向于无穷小的方法。然而，人们在扩充数系到实数系时，证明了实数系是一个非阿基米德域，在阿基米德域中是不可能存在无穷小的，于是无穷小终因它不是实数而被排斥于分析之外。到了1957年，d'Alembert在《百科全书》中推荐把微积分的基础建立在极限论上，后来由Cauchy实现了这个计划。这就是现行的标准分析。1854年A. Timmermans在《微积分专著》的序言中说：“（极限方法）从严格性和准确性来说比完全缺乏这两点的对手即无穷小方法具有很大的优越性，因为前者对有限数量应用算术和代数的规则，从而可以掌握其要领。可是后一种方法……却毫无根据地认为（无穷数）符合同样的运算法则……，但是Leibeinz方法在简明和启发性方面具有太大的优点，以致于我们不相信能够不讲到它……”。这里所指的“无穷数服从（实数）运算的同样规则”就是所谓的Leibeinz原则。人们抛弃它，就是因为Leibeinz原则没有被证明。即使这样，在标准分析中到处还可见无穷小分析的痕迹，比如无穷小元素求和的方法即微元法。事隔300年后，在本世纪60年代美国数理逻辑家A. Robinson运用数理逻辑中一个重要分支——模型论的方法，建立了实数系的扩张：超实数系*R，并且证明了Leibeinz原则，创立了非标准分析。这引起了强烈的反响。P. Cartier在著名的Bourbark讨论班上称：“A. Robinson的《非标准分析》可能是本世纪的杰作之一”，著名的数学家Gödel（哥德尔）则认为“有很多理由可以相信，非标准分析将以某种形式成为未来的分析”，1976年H. J. Keisler在威斯康辛大学为一年级大学生写了教科书《初等微积分》以及自修书《无穷

* 1993年9月5日收稿

小微积分基础》，试图普及非标准分析的教育。那么到底什么是非标准分析呢？

众知，实数系是一个完备的全序的阿基米德域。为了引入无穷小（它定义为其绝对值小于任何正数），一个自然的想法是将趋于 0 的数列看成是新系里的数，而把常数列 (a)等同于 a. 为此令 $\mathrm{R}^N=\{(a_n): a_n\in R, n\in N\}$，在 R^N 上可定义加法与乘法：$(a_n)+(b_n)=(a_n+b_n)$，$(a_n\cdot b_n)=(a_nb_n)$，于是$(\mathrm{R}^N,+,\cdot)$构成一个以 R 为子环的可换环，在 R^N 中定义序关系：$(a_n)<(b_n)\Leftrightarrow\forall\ n,\ a_n<b_n$. 在这样的定义下，$\left(\frac{1}{n}\right)$并不是无穷小，比如当 $n\leqslant 8$ 时，$\left(\frac{1}{n}\right)\nless\frac{1}{8}$. 可以看出，使上述不等式失效的 n 只有有限个。于是在 R^N 中考虑一种等价关系：$(a_n)\sim_r(b_n)\Leftrightarrow\{n: a_n=b_n\}\in\mathscr{F}_r$，其中 $\mathscr{F}_r$ 称为 Frechet 滤，$\mathscr{F}_r=\{A: A\in\mathscr{P}(N)$，$A^c$（$A$ 的余集）为有限集$\}$，按此等价关系$\sim_r$，可将 R^N 划分为等价类$\{[\cdot]_r\}$，令

$$\mathrm{R}^N/\sim_r=\{[a_n]_r:(a_n)\in\mathrm{R}^N\}$$

在 $\mathrm{R}^N/\sim_r$ 中可类似地定义加法与乘法，因为$\forall\ (a_n),(b_n)\in\mathrm{R}^N$，$\{n: a_n=b_n\}$，$\{n: a_n>b_n\}$，$\{n: a_n<b_n\}$，三者有且仅有一个集合属于 $\mathscr{F}_r$，因此我们可相应地定义 $\mathrm{R}^N/\sim_r$ 中的序。这个序是 R 中序的扩张。此时对任何正数 ε，$\frac{1}{n}<\varepsilon$ 不成立的 n 至多有限，因此$\left[\frac{1}{n}\right]_r<\varepsilon$，也即$\left[\frac{1}{n}\right]_r$就是新系中的无穷小，它的倒数便是新系中的无穷大。但遗憾的是 $\mathrm{R}^N/\sim_r$ 不是一个域，因为域中是没有零因子，也即域中两个元，如果其积为 0，则必有一个为 0. 可是若令 $a_n=1$，n 为偶数；$a_n=0$，n 为奇数；$b_n=1$，n 为奇数，$b_n=0$，n 为偶数，则$[a_n]_r\neq0$，$[b_n]_r\neq0$，但$[a_nb_n]_r=0$. 为此我们在 R^N 中寻找更粗的等价关系。记 $\mathscr{P}(N)$ 为 N 的子集族，$\mathscr{F}\subset\mathscr{P}(N)$ 称为是超滤，如果它满足：(1) $\phi\overline{\in}\mathscr{F}$；(2) $\forall\ A,B\in\mathscr{F}$，则 $A\cap B\in\mathscr{F}$；(3) 如 $A\in\mathscr{F}$，$B\supset A$，则 $B\in\mathscr{F}$；(4) $\forall\ A\in\mathscr{P}(N)$，$A$ 与 A^c 必有一个属于 $\mathscr{F}$. 可以证明存在着超滤子 $\mathscr{F}\supset\mathscr{F}_r$. 同样由 $\mathscr{F}$ 可定义相应的等价关系$\sim$：$[a_n]\sim[b_n]\Leftrightarrow\{n: a_n=b_n\}\in\mathscr{F}$，相应的等价类记为$[\cdot]$. 令

$$\theta=\{(a_n)\in\mathrm{R}^N:\quad[a_n]=[0]\}$$

则利用 $\mathscr{F}$ 的超滤性质可以证明，θ 是 R^N 的一个极大理想。由代数学中一个定理可知，同余类环 $\mathrm{R}^N/\sim\equiv\mathrm{R}^N/\theta$ 是一个域。令${}^*\mathrm{R}=\mathrm{R}^N/\sim$，它就是一个以 R 为真子域的全序域，${}^*\mathrm{R}$ 中含有无穷小，因此${}^*\mathrm{R}$ 不是阿基米德域。标准分析的一切概念都有在${}^*\mathrm{R}$ 上的自然扩充。设 $f: R\to R$ 为函数。我们可定义${}^*f: {}^*\mathrm{R}\to{}^*\mathrm{R}$ 如下：$\forall\ s=[s_n]\in{}^*\mathrm{R}$，令${}^*f(s)=[f(s_n)]$，$R$ 上的二元关系 K 也可扩充为${}^*\mathrm{R}$ 上的二元关系${}^*\mathrm{K}$：$S\,{}^*Kt\Leftrightarrow\{n: S_nKt_n\}\in\mathscr{F}$. R 上一个可定义子集 A 可表示为：$A=\{x\in R;\pi(x)\}$，其中 $\pi(x)$是一个形式语句，A 的非标准扩充${}^*A=\{x\in{}^*\mathrm{R}:{}^*\pi(x)\}$，其中${}^*\pi(x)$就是将 $\pi(x)$中常量换为${}^*\mathrm{R}$ 中对应的非标准扩充。比如 $A=\left\{x\in R;\sin x\leqslant\frac{1}{2}\right\}$，则${}^*A=\left\{x\in{}^*\mathrm{R}:{}^*\sin x\leqslant\frac{1}{2}\right\}$. 自然数集 N 也可用一系列命题来描述，将它们换成${}^*\mathrm{R}$ 中的语言，就可得到${}^*\mathrm{N}$. ${}^*\mathrm{N}\backslash N$ 就是无限大自然数集。

Robinson 证明了一个重要定理就是转换原理。设 α 是描述 R 中数学关系的某一形式语句。只要将 α 中所指的常量换为${}^*\mathrm{R}$ 中对应物（即非标准扩张），就得到${}^*\mathrm{R}$ 中一个形式语句${}^*\alpha$。转换原理表明：α 在 R 中为真$\Leftrightarrow{}^*\alpha$ 在${}^*\mathrm{R}$ 中为真。比如 R 中运算满足交换律，则

在$^*R$中亦满足交换律。转换原理其实就是莱布尼茨原则："适用于有限的法则也适用于无限"。应该注意的是，这些法则必须是用形式语言能有限表达的。

令I表示一切无穷小超实数，R_0表示一切有限的超实数，则可证明$R\cong R_0/I$，也就是说任何有限超实数x均可写成$r+j$的形式，其中$r\in R$，$j\in I$. 于是有限的超实数系可示意为图1。

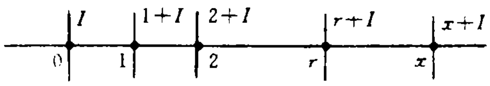

图 1

$r+I$称为是r的单子，每个单子中有且仅有一个实数，称为它的标准部分，记作$st(x)$或$^\circ x$. 单子中两个数相差一个无穷小，称为无穷接近，记作$s\approx t$. 这就是说，在标准分析中的每一个实数，在超实数系中代表着一个单子，它体现了无穷可分的哲学思想。

现在讨论微分的概念。一个实函数f在x处可微，就是指它的非标准扩张$^*f$（仍记为f），对任意的无穷小增量dx，dz，有$\dfrac{f(x+dx)-f(x)}{dx}\approx\dfrac{f(x+dz)-f(x)}{dz}$. 此时，称它们共同的标准部分为导数$f'(x)={}^\circ\left(\dfrac{f(x+dx)-f(x)}{dx}\right)$. 可导必然连续，也即$\forall$无穷小增量$dx$，$f(x+dx)\approx f(x)$. 因此导数就是两个无穷小之比的标准部分，写成$\dfrac{df}{dx}\triangleq f'(x)={}^\circ\left(\dfrac{\Delta f}{\Delta x}\right)$更为简明：称非零的无穷小$\Delta x$为自变量的微分，而$\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$为函数的微分.

下面举一个例子说明非标准分析证明的简明与直观。

定理 闭区间的$[a,b]$上连续函数f，必在$[a,b]$中取到最大值。

证明 令$g: N\times N\to R$，定义为对$[a,b]$的n等分，即当$i<n$时，$g(n,i)=a+\dfrac{i(b-a)}{n}$；$i\geqslant n$时，$g(n,i)=b$. 由转换原理，$^*g: {}^*N\times{}^*N\to{}^*R$，也有同样的表达式。显然在$[a,b]$的有限个分点中，必有$i\in N$，使得$f(g(n,i))\geqslant f(g(n,j))$，$\forall j\leqslant n$. 由转换原理，这个事实对$\omega\in{}^*N\backslash N$也成立。于是存在$i\in{}^*N$，$i\in\omega$使得$f({}^*g(\omega,i))\geqslant f({}^*g(\omega,j))$，$\forall j\leqslant\omega$. 令${}^\circ({}^*g(\omega,i))=c$，则$c\in[a,b]$，由连续性，${}^*f(c)\approx f({}^*g(\omega,j))$. 往证$f(c)$就是最大值。$\forall d\in[a,b]$，$\exists i_d\in{}^*N$，使${}^*g(\omega,i_d)\approx d$. 由连续性，$f(d)\approx f({}^*g(\omega,i_d))\leqslant{}^*f(g(\omega,i))\approx{}^*f(c)=f(c)$（因为$^*f$是$f$在$^*R$上扩张，$c\in[a,b]\subset R$，所以$^*f(c)=f(c)$），注意到$f(c)$、$f(d)$都是标准的实数，所以$f(d)\leqslant f(c)$. 证毕。

它的直观意义很明显。有限剖分时，总有一点使f取到最大（与其它剖分点比较），过渡到无穷多个（ω个）分点，也有一点达到最大。它的标准部分即为所求。

非标准分析导致简洁证明的例子是很多的。比如拓扑学中著名的Tychonoff定理（紧空间的乘积也是紧的），仅需用寥寥四五行字。关于Heilbert空间上多项式紧算子的不变子空间的存在性证明是Bernstein--Robinson用来解决一个多年未解决问题的例子。但是非标准分析决不仅仅用来简化证明，当此F. Diener推荐我们去读1987年C. Lobry的专著"非标准分析和分歧理论"。1972年Robinson与经济学家Brown合作，用超有限个经纪人的观点证明了数理经济学中一个重要的Edgeworth猜想。非标准分析在概率论中的应

用，近年来已由 Robinson，Keisler，Anderson，Loeb 作出了重大的进展。

非标准分析有三个主要工具或技巧。一是转换原理；第二是共点性（或饱和原理）；第三就是内集理论。为了展开数学，仅仅考虑 R 与 *R 是不够的。为此任取一个非空集 S（比如 S 为 R 或某一拓扑空间等），令 $V_0(S)=S,\cdots,V_{n+1}(S)=V_n(S)\cup\mathscr{P}(V_n(S)),\cdots V(S)=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}V_n(S)$，称 $V(S)$ 为 S 上的超结构。在 S 上讨论的一切数学对象（比如集合，子集族，函数，关系，关系的关系）都不会超出 $V(S)$ 的范围。如同由 R 产生 *R，我们可以类似地由 $V(S)$ 产生 $^*V(S)$，而 $V(^*S)\supseteq {}^*V(S)$. $\forall\ A\in V(S)$，称 $^*A$ 为标准集；如 $A\in V(^*S)$，存在 $B\in V(S)$，使 $A\in {}^*B$，则称 A 为内集。如果集 A 中元素可列为 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_\omega\}$，其中 $\omega\in {}^*N\backslash N$，则称 A 为超有限集或 * 有限集。由转换原理可以证明：超有限集具有有限集的一切性质。比如 A 为超有限集，它必有最大，最小元；对超有限个数还可定义加法：$\sum\limits_{n=0}^{\omega}\frac{1}{2^n}=2\left(1-\frac{1}{2^\omega}\right)$. 但是超有限集却是一个无限集。非标准模型的构造依赖于超滤子 $\mathscr{F}$，只要适当地选取 $\mathscr{F}$，可以保证非标准模型 $^*V(S)$ 具有所谓的扩大或多饱和的性质。

设 $(X,\mathscr{D},\nu)$ 是一个扩大模型中的内概率空间，也即 X 是内集，$\mathscr{D}$，是内代数，ν 是 * 有限可加的集函数 $\nu:\mathscr{D}\to {}^*R_+$. 由饱和性可以证明，如果 $A_n\in\mathscr{D}$，$A_n\downarrow\phi$，则必存在 n 使 $A_n=\phi$. 因此，$^0\nu(A)\triangleq {}^0(\nu(A))$ 就是 $\mathscr{D}$ 上有限可加且 ϕ 上连续的集函数．由测度扩张定理，我们可以得到 $^0\nu$ 在 $\sigma(\mathscr{D})$ 上的扩张 $L(\nu)$，将 $\sigma(\mathscr{D})$ 完备化则得 $L(\mathscr{D})$，称 $(X,L(\mathscr{D},L(\nu))$ 为 loeb 概率空间。

设 $(X,\mathscr{C},\nu)$ 是标准的 Radon 空间，我们可以证明存在 * 有限概率空间 $(Y,\mathscr{D},\nu)$ 以及由它产生的 Loeb 空间 $(Y,L(\mathscr{D}),L(\nu))$，一个保测的映射 σ：$(Y,L(\mathscr{D}),L(\nu))\to(X,\mathscr{C},\mu)$，于是对任何 $\mathscr{C}$ 可测函数 f

$$\int_Y\sigma\circ fdL(\nu)=\int_X fd\mu$$

所以在 $(X,\mathscr{C},\mu)$ 上展开的概率论可以由 $(Y,L(\mathscr{D}),L(\nu))$ 而得到。对 $(Y,L(\mathscr{D}),L(\nu))$ 上 loeb 可测函数 f，存在所谓 S 可积的内函数 F，使 $^0F=f$，且 $^0(\int Fd\nu)=\int fdL(\nu)$. 由此可见，概率论本质上可以通过 * 有限内概率空间来表示，而在 * 有限内概率空间上积分就是 * 有限求和，而 * 有限求和与有限求和的规则是一样的。

现在讨论随机分析中的基础 —— Browian 运动，取 $\eta\in {}^*N\backslash N$，$T=\left\{0,\ \frac{1}{\eta},\ \frac{2}{\eta},\ \cdots,\ 1\right\}$，$\Omega=\{-1,1\}^\eta$，即由 -1、1 构成的 η 维的内序列，Ω 是一个超有限集。取 $\mathscr{D}$ 为由 Ω 的全体内子集生成的代数，$\overline{P}$ 为内计数测度，亦即 $\forall\ A\in\mathscr{D}$，$\overline{P}(A)=\|A\|/2^\eta$. 令 $(\Omega,L(\mathscr{D}),P)$ 为 loeb 空间，定义超有限过程：$\forall\ t\in T$，

$$\chi(t,\omega)=\frac{1}{\sqrt{\eta}}\left(\sum_{i=1}^{[\eta t]}\omega_i+(\eta t-[\eta t])\,\omega_{[\eta t]+1}\right)$$

那么 $\chi(t,\omega)$ 就是一个以 $\frac{1}{2}$ 概率向左或向右移动 $\frac{1}{\sqrt{\eta}}$ 的随机游动。令 $\beta(^0t,\omega)={}^0(\chi(t,\omega))$，则可证明 $\beta(^0t,\omega)$ 就是 $[0,1]$ 上的 Browian 运动。这就是说 Browian 运动就是超有限随机游动的标准部分。$\chi(t,\omega)$ 总以跃度 $\frac{1}{\sqrt{\eta}}$ 而跳动，但其标准部分 $\beta(^0t,\omega)$ 在 $[0,1]$ 上是连续

的。关于 Browian 运动的随机积分 $\int_0^t f(s,\omega)d\beta(s,\omega)$ 可表示为 f 的提升 F 对 χ 的 stiejies 积分的标准部分。注意到 $\int F d\chi$ 是一个 * 有限的 stijies 求和。于是 $\int f d\beta$ 不能看成是 stijies 积分的困扰得以解脱。

基于同样的思想，1987 年 Edward Nelson 出版了一本书《Radically Elementary Probability theory》，他认为 50 多年前由 Kolmogorov 建立的公理体系所引入的测度论基础并没有为应用概率论提供更好的工具，而只是给出一个数学严密性的叙述。他认为应用非标准分析可以避免这种测度论式的叙述。设 $(\Omega_0, \mathscr{F}_0, P_0, R_+, \zeta_0)$ 是一个标准的过程，存在超有限集 T，使 $R_+ \subseteq T \subseteq {}^*R_+$，于是存在一个只取超有限多个值的过程 $\zeta(t)$，使得

$$\sum_{t\in T} |\xi(t) - \xi_0(t)| \backsimeq 0$$

如果 $\xi_0 \in L^p$，$1 \leqslant p \leqslant \infty$，还可要求

$$\sum_{t\in T} \| \xi(t) - \xi_0(t) \|_p \backsimeq 0$$

其中 $\| \cdot \|_p$ 表示 L^p 中范数。他还证明了关于 $(\xi_0(t))$，$(\xi(t))$ 一些解析性质与概率性质的等价关系。这进一步地提示我们概率论从其实质上讲是有限概率空间的初等概率论。当然彻底地证实这一论断还需要在经典概率论与超有限概率论之间铺设更为便利的桥梁。希望有更多的同行从事这项工作，这正是我写这个综述的目的。

参 考 文 献

1 A Robinson. 非标准分析（中译本）. 北京：科学出版社，1980

2 Martin Davis. 应用非标准分析（中译本）. 西安：陕西师大出版社，1989

3 金治明. 非标准分析导论，国科科技大学数学系，1991

4 H J Keisler，金治明译. 无穷小微积分基础. 国防科技大学数学系，1990

5 金治明，刘普寅. 非标准测度论与随机分析. 国防科技大学数学系，1993

6 R M Anderson. A Nonsfandard Representation of Browian Motion and Ito Integration. Israel. J. Math. 1976 (25)：15～46

7 Edward Nelson. Radically Elementary Probability Theory. Princeton University Press. 1987

Non-Standard Analysis and Probability

Jin Zhiming

(Department of System Engineering and Maths，TUDT，Changsha，410073)

Abstract

This paper qives a brief account of the history of non-standard analgsis and introduces the hyper-real system, the nonstandard representation of deriate. We illustrate that the proof of mathematical proposition by nonstandard methods is simpler and more directly perceived through the senses than standard methods. In the last part of the paper, we infroduce the loeb probability space, the integral in respect to p as *-finite summation and point out that the probability theory is radically elementary

Key words Non-standard analysis, loeb probability space, *-finite summation