

固体火箭发动机长期贮存 热载荷的有限元分析方法*

冯志刚 周建平

(国防科技大学航天技术系 长沙 410073)

摘要 分析了固体火箭发动机药柱在长期贮存过程中, 由于温度载荷谱的变化所引起的力学响应。基于粘弹性积分蠕变型本构关系, 推导了能分析粘弹结构的热载荷的有限元模型, 并用它分析了梁、厚壁圆筒与真实固体火箭发动机的热应力问题。

关键词 粘弹性; 有限元法; 热应力

分类号 V435.13; O242.21

复合固体推进剂在贮存期间, 由于环境温度载荷谱的变化(贮存温度与固化温度的不同及日常环境温度的变化)以及固体火箭发动机不同结构所用材料的热膨胀系数存在差异, 使药柱在贮存中长期处于交变热应力作用之下。由于低周疲劳载荷的作用, 药柱材料的微观结构上会产生微裂纹等损伤, 并可能发生扩展, 导致药柱结构上出现宏观裂纹, 使药柱的结构完整性被破坏。因此尽可能准确地分析固体火箭发动机在贮存期内的热应力谱, 对发动机的结构完整性分析与寿命预估都有十分重要的意义。但由于药柱材料是一种具有粘弹特性的高聚物, 工程上目前还很难对它进行十分有效的分析。一般是把它简化为弹性结构进行定性分析, 然后在局部考虑其粘弹性效应, 导致误差较大。本文基于粘弹性本构关系, 用有限元法定量地分析了药柱在环境交变热载荷下的响应。算例表明, 本文的方法对固体火箭发动机药柱的热应力分析, 具有较高的精度。

1 有限元模型

1.1 适合有限元分析的增量型本构关系

对三轴应力状态, 总应变由弹性应变 $\{\epsilon^e\}$, 粘性应变 $\{\epsilon^c\}$, 热应变 $\{\epsilon^T\}$ 组成。

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon^e\} + \{\epsilon^c\} + \{\epsilon^T\} \quad (1)$$

式中热应变 $\{\epsilon^T\} = \alpha_T \Delta T [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, α_T 是热膨胀系数, ΔT 为温度增量。

弹性应变和蠕变应变由粘弹本构关系可得

$$\{\epsilon^e\} + \{\epsilon^c\} = [ED] \int_{-\infty}^t J(t - \tau) \frac{\partial \{\tilde{\sigma}\}}{\partial \tau} d\tau \quad (2)$$

* 1993年8月25日收稿

式中 $J(t)$ 为蠕变柔量, $\{\tilde{\sigma}\}$ 为有效应力, 且有 $\{\tilde{\sigma}\} = \frac{1}{1-\omega} \{\sigma\}$, ω 为粘弹性损伤变量。

$$[ED] = \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$$

将(2)式离散化得

$$\{\epsilon^e\} + \{\epsilon^c\} = [ED] \sum_{K=0}^M J(t_m - t_K) \{\Delta\tilde{\sigma}_K\} \quad (3)$$

式中

$$\{\Delta\tilde{\sigma}\}_K = \{\tilde{\sigma}(t_K)\} - \{\tilde{\sigma}(t_{K-1})\}$$

$$\{\Delta\epsilon\}_{K+1} = \{\epsilon\}_{K+1} - \{\epsilon\}_K = \{\Delta\epsilon^e\}_{K+1} + \{\Delta\epsilon^c\}_{K+1} + \{\Delta\epsilon^T\}_{K+1} \quad (4)$$

由虎克定律有

$$\{\Delta\epsilon^e\}_{K+1} = \frac{1}{E_0} [ED] \{\Delta\tilde{\sigma}\}_{K+1} \quad (5)$$

式中 E_0 为持久损量, $E_0 = 1/J(\infty)$.

取 $J(t) = J_0 + \sum_{i=1}^N J_i (1 - e^{-t/\tau_i})$, 代入(3)式有

$$\{\Delta\epsilon^e\}_{K+1} = \sum_{j=1}^N [S'_{K+1}]_j J_j \{1 - e^{-\frac{\Delta t_{K+1}}{\tau_j}}\} \quad (6)$$

式中

$$[S'_{K+1}] = [S'_K] e^{-\frac{\Delta t_K}{\tau_j}} + [ED] \{\Delta\tilde{\sigma}\}_K \quad (7)$$

$$[S'_0] = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (8)$$

于是利用递推式(6)(7)(8)计算 $\{\Delta\epsilon\}_{K+1}$ 时, 无需再记录其全部历史, 只需贮存 $[s'_k]$ 即可, 大大节约了计算机内存以及计算时间。应力增量可表示为

$$\{\Delta\tilde{\sigma}\}_{K+1} = [E] (\{\Delta\epsilon\}_{K+1} - \{\Delta\epsilon^c\}_{K+1} - \{\Delta\epsilon^T\}_{K+1}) \quad (9)$$

式中 $[E] = E_0 [ED]^{-1}$, 为弹性矩阵。又由等效应力定义可推出

$$\begin{aligned} \{\Delta\tilde{\sigma}\}_{K+1} &= \{\tilde{\sigma}\}_{K+1} - \{\tilde{\sigma}\}_K = \frac{\{\sigma\}_{K+1}}{1-\omega_{K+1}} - \frac{\{\sigma\}_K}{1-\omega_K} \\ &= \frac{\{\Delta\sigma\}_{K+1}}{1-\omega_{K+1}} + \frac{\Delta\omega_{K+1} \{\sigma\}_K}{(1-\omega_K)(1-\omega_{K+1})} \end{aligned} \quad (10)$$

式中 $\Delta\omega_{K+1} = \omega_{K+1} - \omega_K$, 为损伤增量。

联立(9)、(10)式, 就可得出粘弹材料的适合于有限元分析的增量型本构关系

$$\{\Delta\sigma\}_{K+1} = (1-\omega_{K+1}) [E] (\{\Delta\epsilon\}_{K+1} - \{\Delta\epsilon^c\}_{K+1} - \{\Delta\epsilon^T\}_{K+1}) - \frac{\Delta\omega_{K+1}}{1-\omega_K} \{\sigma\}_K \quad (11)$$

1.2 有限元算法

由有限元法思想, 位移和应变可表为

$$\{u\} = [N] \{u_i\} \quad (12)$$

$$\{\epsilon\} = [B]\{u_i\} \quad (13)$$

式中 $\{u_i\}$ 为节点位移, $[N]$ 为有限元的形状函数矩阵, $[B]$ 为应变矩阵。

由虚功原理, 在 t_k 和 t_{k+1} 两个时刻有

$$\int_V \{\sigma\}_k^T \{\delta\epsilon\} dV = \int_V \{\delta u\}^T \{p\}_k dV + \int_S \{\delta u\}^T \{q\}_k ds \quad (14)$$

$$\int_V \{\sigma\}_{k+1}^T \{\delta\epsilon\} dV = \int_V \{\delta u\}^T \{p\}_{k+1} dV + \int_S \{\delta u\}^T \{q\}_{k+1} ds \quad (15)$$

式中 $\{\delta u\}$ 为虚位移, $\{\delta\epsilon\}$ 为虚应变, $\{p\}$ 为体积力矢量, $\{q\}$ 为面力或集中力矢量。

用(15)式减去(14)式可得

$$\int_V \{\Delta\sigma\}_{k+1}^T \delta\{\epsilon\} dV = \int_V \{\delta u\}^T \{\Delta p\}_{k+1} dV + \int_S \{\delta u\}^T \{\Delta q\}_{k+1} ds \quad (16)$$

将式(11)的增量型本构关系代入(16)式可得如下表征结构总体平衡的非线性方程

$$[K(\omega_k)]\{\Delta u_i\}_{k+1} = \{\Delta Q(\omega_k)\} + \{\Delta Q^c(\omega_k, \Delta\omega_{k+1})\} \quad (17)$$

$$\text{式中} \quad [K(\omega_k)] = \int_V (1 - \omega_k) [B]^T [B] dv \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \{\Delta Q(\omega_k)\} &= \int_V [N]^T \{\Delta P\}_{k+1} dV + \int_S [N]^T \{\Delta q\}_{k+1} ds \\ &+ \int_V (1 - \omega_k) [B]^T [E] (\{\Delta\epsilon^c\}_{k+1} + \{\Delta\epsilon^T\}_{k+1}) dV \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \{\Delta Q^c\} &= \int_V \Delta\omega_{k+1} [B]^T \{[E] (\{\Delta\epsilon\}_{k+1} - \{\Delta\epsilon^c\}_{k+1} - \{\Delta\epsilon^T\}_{k+1}) \\ &+ \frac{1}{1 - \omega_k} \{\sigma\}_k\} dV \end{aligned} \quad (20)$$

在每一时间增量变内, $[K(\omega_k)]$ 和 $\{\Delta Q\}$ 仅是前一步损伤变量的函数, 只需计算一次, 而失衡力矢量 $\{\Delta Q^c\}$ 由迭代法解出, 收敛判据取为

$$\sum_i |\Delta u_{i,k+1}^{(j)} - \Delta u_{i,k+1}^{(j-1)}| / \sum_i |\Delta u_{i,k+1}^{(j)}| < \epsilon \quad (21)$$

式中 $\Delta u_{i,k+1}^{(j)}$ 是第 i 个节点位移在第 k 个时间增量步时迭代 j 次后的位移增量, 即当相邻两次迭代导致的位移差值与总的位移增量之比小于一个充分小的正数 ϵ 时, 迭代收敛。

对二维平面应力与平面应变问题, 采用了八节点等参元进行有限元分析。

3 数值算例

3.1 两端固定的热应力梁

有限元单元网络图如图 1。材料的固化温度 $T_s = 333\text{K}$, 松弛模量形为 $E(t) = E_0 + E_1 e^{-\frac{t}{t_1}} \text{N/m}^2$, 其中 $E_0 = E_1 = 3 \times 10^6$, $t_1 = 10^{-4}\text{s}$ 。

(1) 模拟一种一天的温度变化为一个正弦波的温度载。取温度谱为 $T = T_0 + T_1 \sin 2\pi t / (24 \times 60)$, 单位 K。 $T_0 = 293\text{K}$, $T_1 = 10$, t 以分为单位, 推导出其热应力解为

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= -\alpha_T (E_0 T_1 \sin \alpha_2 t - E_1 \alpha_2 T_1 e^{-\alpha_1 t} \frac{\alpha_1 e^{\alpha_1 t} \cos \alpha_2 t - \alpha_1 + \alpha_2 e^{\alpha_1 t} \sin \alpha_2 t}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \\ &- (E_0 + E_1)(T_0 - T_s)) \end{aligned} \quad (22)$$

式中 $\alpha_1 = -\frac{1}{t_1}, \alpha_2 = \frac{2\pi}{24 \times 60}$ 。取 $\alpha_T = 0.0001$ 时, 计算结果见表 1。

表 1 两端固定梁的热应力解 /Nm⁻²

时间 (分)	0.0	400	800	1200	1490
理论解 (10 ⁻²)	2.4	1.81	2.60	2.92	2.25
有限元 (10 ⁻²)	2.40	1.805	2.597	2.906	2.253

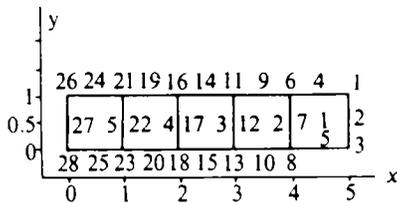


图 1 梁的有限元网络图

(2) 取 $T = T_0 + T_1 \sin 2\pi t + T_2 \sin \frac{2\pi t}{365}$, 即模拟每年的温度变化也是一个正弦波的情形, 其中 t 以天为单位。取 $T_2 = 10$, 求得的响应见图 2。

3.2 厚壁圆筒的热应力解。

一外内半径为 5m, 外半径为 10m 的圆筒, 材料常数同上。有限元网络见图 3。取 $\alpha_T = 0.001, \Delta T = -40H(t), \mu = 0.495$ 。图 4 为圆筒内壁环向应力随时间的变化图, 表 2 为应力解结果。

图 2 圆筒热应力解结果 /Nm⁻²

半径 R	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
理论解 σ_θ	0.2058	0.1744	0.1554	0.1431	0.1347	0.1286
有限元 σ_θ	0.2063	0.1750	0.1559	0.1435	0.1350	0.1288
理论解 σ_r	0.0	0.0314	0.0504	0.0627	0.0711	0.0772
有限元 σ_r	0.0005	0.0308	0.0499	0.0623	0.0708	0.0770

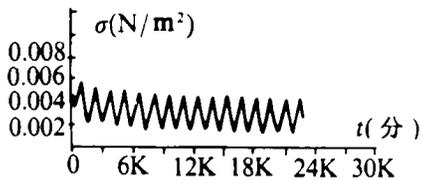


图 2 梁轴向应力变化图

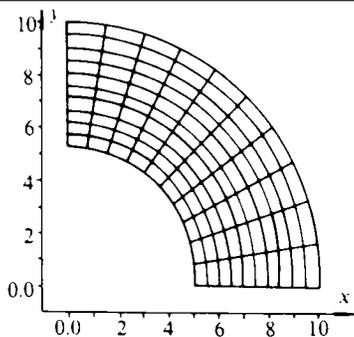


图 3 厚壁圆筒单元网络图

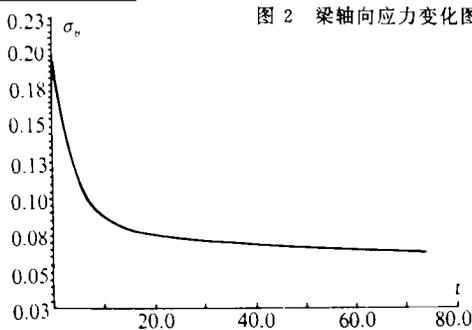


图 4 厚壁圆筒内壁环向应力变化图

3.3 固体火箭发动机药柱的热应力解

本文分析了一个八星孔的发动机药柱, 由于结构与受载的对称性, 可以只取半个星孔进行有限元计算。药柱材料常数同前。单元网络图如图 5。其中最外层为壳体, 材料常数为: $E_c = 2.1 \times 10^7 \text{N/m}^2, \mu_c = 0.3$ 。

(1) 取温度谱为算例 1 中 (2) 的形式, 模拟每年及每天的温度变化为一正弦波的情形。求得药柱 A 点的第一、第二主应力图如图 6、图 7。

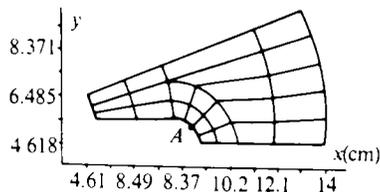


图 5 药柱单元网络划分图

(2) 取 $T = T_0 + T_1 \sin \frac{2\pi t}{91} + T_2 \sin \frac{2\pi t}{365} K$, 即模拟每年及每个季度的温度变化为一个正

弦波的情形，其中 t 以天为单位。其它参数同上。当药柱贮存三年左右时， A 点的第一、第二主应力变化分别见图 8、图 9。图 10 绘制了在药柱贮存 11 天时，药柱半圆孔四分之一圆弧段上第一主应力的分布图。

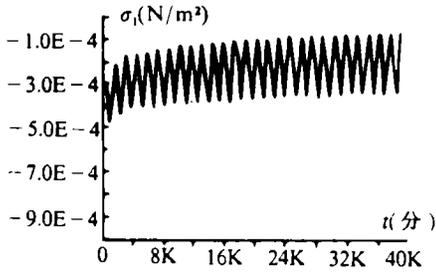


图 6 A 点第一主应力变化图

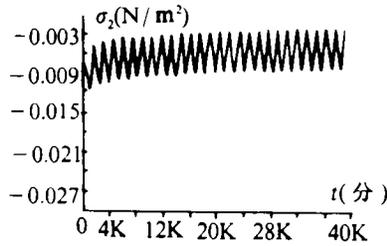


图 7 A 点第二主应力变化图

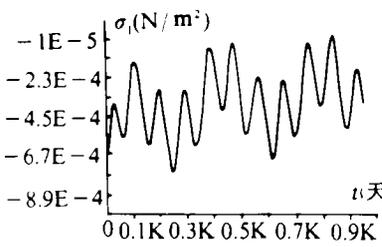


图 8 A 点第一主应力变化图

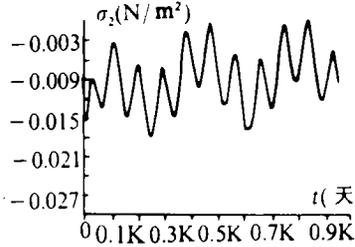


图 9 A 点第二主应力变化图

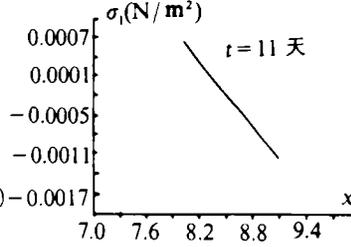


图 10 星孔内表面第一主应力图

参 考 文 献

- 1 Christensen R M. Theory of Viscoelasticity, An Introduction. Academic Press, 1982, 1~182
- 2 周建平, 冯志刚, 唐国金等. 复合固体推进剂老化本构关系和固体火箭发动机应力分析方法研究. 技术总结报告, 1993, 6: 1~210
- 3 Zienkwich O C. 有限元法. 科学出版社, 1985, 1~300

The Thermal Stress of the Solid Rocket Motor Grain in Storage

Feng Zhigang Zhou Jianping

(The Department of Aerospace Technology, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract

Stress analysis of solid propellant motor when temperature varies in storage is presented in this paper. A viscoelastic finite element model based on integral creep constitutive relation is obtained and the method is applied to the thermal stress analysis of viscoelastic beam, cylinder and solid propellant motor.

Key words viscoelastic; the finite element method; thermal stress