国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第16卷第3期 1994年9月 Vol.16 No.3

语义树方法及其可靠性和完备性*

李舟军 王兵山
(国防科技大学计算机系 长沙 410073)

摘 要 Andrews 在《An Introduction to Mathematical Logic and Type Theory: To Truth Through Proof》一书中给出的语义树方法是一种能直接适用于句子集的反驳方法,但其中关于语义树方法的可靠性和完备性定理(3201)及其证明是错误的。本文通过例子指出并纠正了这一错误,同时对修正后的可靠性和完备性定理给出了详细的证明。

关键词 抽象协调类;语义树;可靠性;完备性
分类号 TP301.2

用 Robinson 提出的归结原理(Resolution Principle)对所给句子集进行反驳时,事先必须进行前束化、Skolem 化和合取范式化等变形预处理,这样不仅引入了大量的冗余,而且得到的子句集将会丧失原句子集的一些基本的逻辑结构特征,从而使得反驳的构造过程复杂化。关于这一点,Andrews 在文[2]中进行了充分的说明和论证,并且在文献[1]中给出了一种不同于归结原理的反驳方法——语义树方法。该方法具有"自然推理"风格,且无需对所要反驳的句子集进行前束化、Skolem 化和合取范式化等变形预处理,保持了其结构特征,因而整个反驳过程显得直观而自然。但文献[1]中关于语义树方法的可靠性和完备性定理(3201)及其相应证明是错误的。本文通过例子指出并纠正了这一错误,同时对修正后的可靠性和完备性定理给出了详细的证明。

1 预备知识

本文所使用的一阶谓词逻辑形式系统 $\mathscr{F}$,其语言部分的符号分为逻辑符号和非逻辑符号两大类。

逻辑符号包括:i)逻辑联结词:$\sim$和$\vee$;ii)量词:$\forall$;iii)辅助符号:(和);iv)个体变元:x,y,z,…(可数无穷多个)。

非逻辑符号包括:i)个体常元:a,b,c,…(任意多个);ii)函数常元:对每个 $n\geqslant1$,都有任意多个 n 元函数常元;iii)命题常元:p,q,r,…(任意多个);iv)谓词常元:对每个 $n\geqslant1$,都有任意多个 n 元谓词常元。

本文基本上沿用文献[1]中的符号和术语,逻辑联结词$\wedge$、$\supset$、$\equiv$和存在量词$\exists$ 是作

---

* 1993年10月15日收稿

为缩写引入的。我们用$\mathscr{L}(\mathscr{F})$、$\mathscr{L}_0(\mathscr{F})$、$\mathscr{A}(\mathscr{F})$、$\mathscr{T}(\mathscr{F})$和$\mathscr{T}_0(\mathscr{F})$分别表示$\mathscr{F}$的合式公式集、句子集、原子公式集、项集和无变元项集。若项 t 对于合式公式 A 中的 x 是可代入的，则将其代入结果记为$S^x_t A$。

出于下文证明语义树方法完备性的需要，我们在此给出抽象协调类的概念以及著名的 Smullyan 合一定理，详情及有关证明见文[1,3]。

定义 1.1 设$\mathscr{H}\subseteq 2^{\mathscr{L}_0(\mathscr{F})}$。如果$\mathscr{H}$满足条件：

若$\Gamma_1\subseteq\Gamma_2$且$\Gamma_2\in\mathscr{H}$，则$\Gamma_1\in\mathscr{H}$。

就称$\mathscr{H}$具有子集性质。

定义 1.2 若$\mathscr{H}\subseteq 2^{\mathscr{L}_0(\mathscr{F})}$满足以下条件：

1° $\mathscr{H}$具有子集性质；

2° 如果$\Gamma\in\mathscr{H}$且 A，$B\in\mathscr{L}_0(\mathscr{F})$，则有：

a) 若$A\in\mathscr{A}(\mathscr{F})$，则$A\notin\Gamma$或$\sim A\notin\Gamma$；

b) 若$\sim\sim A\in\Gamma$，则$\Gamma\cup\{A\}\in\mathscr{H}$；

c) 若$A\vee B\in\Gamma$，则$\Gamma\cup\{A\}\in\mathscr{H}$或$\Gamma\cup\{B\}\in\mathscr{H}$；

d) 若$\sim(A\vee B)\in\Gamma$，则$\Gamma\cup\{\sim A,\sim B\}\in\mathscr{H}$；

e) 若$\forall xA\in\Gamma$且$t\in\mathscr{T}_0(\mathscr{F})$，则$\Gamma\cup\{S^x_t A\}\in\mathscr{H}$；

f) 若$\sim\forall xA\in\Gamma$且个体常元 a 不在Γ中出现，则$\Gamma\cup\{\sim S^x_a A\}\in\mathscr{H}$。

就称$\mathscr{H}$为抽象协调类。

定义 1.3 设$\Gamma\subseteq\mathscr{L}(\mathscr{F})$。

i) 若Γ中不含个体常元，则称Γ为纯的；

ii) 若有$\#\mathscr{L}(\mathscr{F})$多个个体常元不在$\Gamma$中出现；则称$\Gamma$为充分纯的。

定理 1.1[3] 若$\mathscr{F}$中个体常元最多（即个体常元的个数不少于个体变元的个数、函数常元的个数、命题常元的个数和谓词常元的个数），则每个有穷集$\Gamma\subseteq\mathscr{L}(\mathscr{F})$都是充分纯的。

定理 1.2 （Smullyan 合一定理）设$\mathscr{H}$是抽象协调类且$\Gamma\in\mathscr{H}$。若Γ为充分纯的，则Γ有模型，因而是协调的。

2 语义树

语义树是按照某种规则在有向二叉树的每个结点上都标记有一个合式公式而构成的。关于有向二叉树及其有关概念，诸如根、叶、分枝、结点、子结点、父结点和祖先等等，均可在图论的有关著作中找到，下面仅给出语义树的形式定义。

定义 2.1 若$\Gamma\subseteq\mathscr{L}(\mathscr{F})$，则$\Gamma$的语义树可归纳定义如下：

i) 根标记为Γ中元素的单结点树为Γ的语义树；

ii) 若 T 为Γ的语义树，u 为 T 的叶且$\bar{u}$为 u 或 u 的祖先，则按下列规则之一从 T 导出的树 T′为Γ的语义树：

Hyp（前提引入规则）：从 u 连接一个标记为Γ中元素的新叶 v；

$\sim\sim$（双重否定消去规则）：若$\bar{u}$标记为$\sim\sim A$，则从 u 连接一个标记为 A 的新叶 v；

$\wedge$（合取消去规则）：若$\bar{u}$标记为$\sim(A\vee B)$，则从 u 连接一个标记为$\sim A$或$\sim B$的新

叶 v；

∨（析取消去规则）：若 $\bar{u}$ 标记为 A∨B，则从 u 连接两个分别标记为 A 和 B 的新叶 v_1 和 v_2；

∀I（全称指定规则）：若 $\bar{u}$ 标记为∀xA 且项 t 对 A 中的 x 是可代入的，则从 u 连接一个标记为 $S_t^x A$ 的新叶 v；

∃I（存在指定规则）：若 $\bar{u}$ 标记为～∀xA 且个体常元 a 在 Γ 和 T 中均不出现，则从 u 连接一个标记为 $\sim S_a^x A$ 的新叶 v。

显然，一个合式公式可以被标记在一棵语义树的多个不同的结点上。

例 1 若 Γ＝{∃v∀xP(x,v),∀x(S(x)⊃∃yQ(y,x)),∀x∀y(P(x,y)⊃～Q(x,y)),∀uS(u)}，则可构造 Γ 的一棵语义树 T（如图 1 所示）。

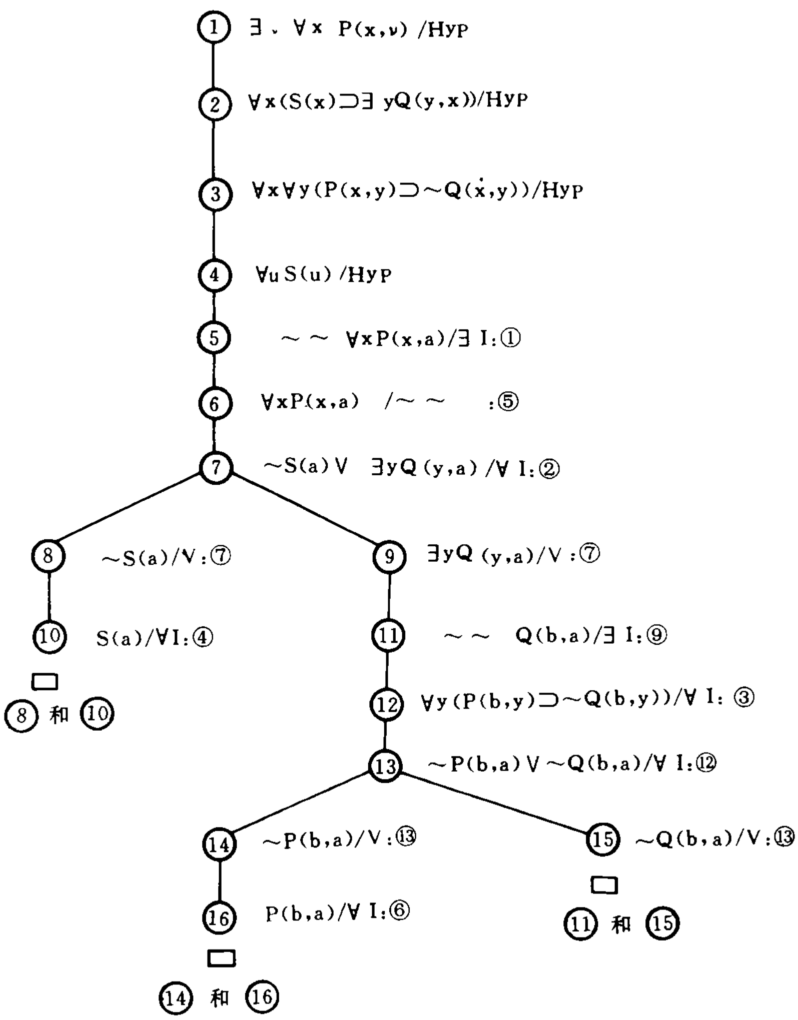

图 1 Γ 的语义树 T

为了便于了解语义树的实际构造方法，我们特别在 T 的每个结点所标记的合式公式后面注明了所使用的规则和根据，这些并不属于语义树 T。

定义 2.2 设 T 为 $\Gamma\subseteq\mathscr{L}(\mathscr{F})$的语义树。

i）设 β 为 T 的分枝。若存在 $A\in\mathscr{L}(\mathscr{F})$使 β 包含两个分别标记为 A 和～A 的结点，则称 β 为闭的，并在 β 的叶下面标注符号□。

ii）若 T 的每个分枝都是闭的，则称 T 为闭的。

显然，例 1 中所构造的语义树 T 为闭的。

如果语义树 T 为闭的，则称 T 为闭语义树。下面，我们主要讨论闭语义树。

例 2 设 $\mathscr{F}$ 至少含有可数无穷多个个体常元，P 和 Q 为两个不同的一元谓词常元，f 为一元函数常元。当取

$$\Gamma_1=\{\forall xP(x),\sim\forall yP(f(y))\},$$

$$\Gamma_2=\Gamma_1\cup\{Q(a)\mid a\text{ 为 }\mathscr{F}\text{ 的个体常元}\}$$

时，显然 $\Gamma_1\subseteq\Gamma_2$ 且 Γ_2 无闭语义树，但我们却可以构造 Γ_1 的一棵闭语义树 T_1（如图 2 所示）。

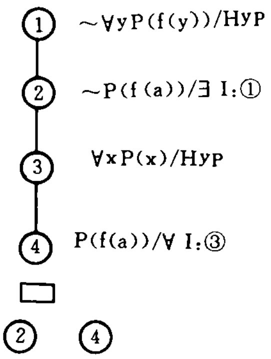

图 2 Γ_1 的语义树 T_1

3 可靠性和完备性

在证明语义树方法的可靠性和完备性定理之前，我们先给出两个引理。

引理 3.1 设 $\Gamma\subseteq\mathscr{L}(\mathscr{F})$且 $A\in\Gamma$。若 Γ 有闭语义树，则 Γ 必有闭语义树满足：

i）根标记为 A；

ii）不再含有由规则 Hyp 引入的标记为 A 的非根结点。

根据语义树的定义易证本引理，其详细证明见[3]。

引理 3.2 设 $\mathscr{F}$ 中个体常元最多。若令：

$\widetilde{\mathscr{H}}=\{\Gamma\subseteq\mathscr{L}_0(\mathscr{F})\mid\Gamma$ 为有穷集且 Γ 无闭语义树$\}$，则$\widetilde{\mathscr{H}}$为抽象协调类。

证明 因为 $\mathscr{F}$ 中个体常元最多，所以 $\mathscr{F}$ 中至少含有可数无穷多个个体常元。

1° 设 $\Gamma_1\subseteq\Gamma_2$ 且 $\Gamma_2\in\widetilde{\mathscr{H}}$。首先由 $\Gamma_2\in\widetilde{\mathscr{H}}$可知，$\Gamma_2$ 为有穷集且无闭语义树，从而由 $\Gamma_1\subseteq\Gamma_2$ 可知 Γ_1 为有穷集。若 Γ_1 有闭语义树 T 且 $a_1,\cdots,a_n$ 为 T 中所有由规则∃ I 引入的个体常元，当用在 Γ_2 和 T 中均不出现的新个体常元 $a_1',\cdots,a_n'$（因为 Γ_2 为有穷集且 $\mathscr{F}$ 至少含有可数无穷多个个体常元，所以这样的 $a_1',\cdots,a_n'$ 必存在）分别替换 T 中的 $a_1,\cdots,a_n$ 时，就可获得 Γ_2 的闭语义树，这与 Γ_2 无闭语义树矛盾，所以 Γ_1 无闭语义树。因此 $\Gamma_1\in\widetilde{\mathscr{H}}$，这表明$\widetilde{\mathscr{H}}$具有子集性质。

2° 设 $\Gamma\in\widetilde{\mathscr{H}}$且 $A,B\in\mathscr{L}_0(\mathscr{F})$，则 Γ 为有穷集且无闭语义树。

a）若 $A\in\mathscr{A}(\mathscr{F})$，则由 Γ 无闭语义树可知，必有 $A\notin\Gamma$ 或$\sim A\notin\Gamma$。

b）设$\sim\sim A\in\Gamma$。若 $\Gamma\cup\{A\}\notin\widetilde{\mathscr{H}}$，则由 $\Gamma\cup\{A\}$为有穷集可知，$\Gamma\cup\{A\}$必有满足引理 3.1 的闭语义树 T(根标记为 A)。从 T 的根向上连接一个标记为～～A 的新根所得之树 T′显然为 Γ 的闭语义树，这与 Γ 无闭语义树矛盾。所以 $\Gamma\cup\{A\}\in\widetilde{\mathscr{H}}$。

c）设 $A\vee B\in\Gamma$。若 $\Gamma\cup\{A\}\notin\widetilde{\mathscr{H}}$ 且 $\Gamma\cup\{B\}\notin\widetilde{\mathscr{H}}$，则由它们均为有穷集可知，它们分别有满足引理 3.1 的闭语义树 T_1(根标记为 A)和 T_2(根标记为 B)。显然，以标记为 $A\vee B$ 的新结点为根且以 T_1 和 T_2 为左右子树而构成的树 T，就是Γ的一棵闭语义树，这与Γ无闭语义树矛盾。所以必有 $\Gamma\cup\{A\}\in\widetilde{\mathscr{H}}$ 或 $\Gamma\cup\{B\}\in\widetilde{\mathscr{H}}$。

d) 设 $\sim(A\vee B)\in\Gamma$。若 $\Gamma\cup\{\sim A,\sim B\}\notin\widetilde{\mathscr{H}}$，则由 $\Gamma\cup\{\sim A,\sim B\}$ 为有穷集可知，它必有满足引理 3.1 的闭语义树 T(根标记为 $\sim A$)。从 T 的根向上连接一个标记为 $\sim(A\vee B)$ 的新根，就可获得Γ的一棵闭语义树，这与Γ无闭语义树矛盾。所以必有 $\Gamma\cup\{\sim A,\sim B\}\in\widetilde{\mathscr{H}}$。

e）设 $\forall xA\in\Gamma$ 且项 $t\in\mathscr{T}_0(\mathscr{F})$，此时 S^x_tA 为句子。若 $\Gamma\cup\{S^x_tA\}\notin\widetilde{\mathscr{H}}$，则由 $\Gamma\cup\{S^x_tA\}$ 为有穷集可知，它必有满足引理 3.1 的闭语义树 T(根标记为 S^x_tA)。从 T 的根向上连接一个标记为 $\forall xA$ 的新根，就可获得Γ的一棵闭语义树，这与Γ无闭语义树矛盾。所以必有 $\Gamma\cup\{S^x_tA\}\in\widetilde{\mathscr{H}}$。

f）设 $\sim\forall xA\in\Gamma$ 且个体常元 a 在Γ中不出现。若 $\Gamma\cup\{\sim S^x_aA\}\notin\widetilde{\mathscr{H}}$，则由 $\Gamma\cup\{\sim S^x_aA\}$ 为有穷集可知，它必有满足引理 3.1 的闭语义树 T（根标记为 $\sim S^x_aA$)。从 T 的根向上连接一个标记为 $\sim\forall xA$ 的新根，就可获得Γ的一棵闭语义树，这与Γ无闭语义树矛盾。所以必有 $\Gamma\cup\{\sim S^x_aA\}\in\widetilde{\mathscr{H}}$。

综上所述，$\widetilde{\mathscr{H}}$ 确为一个抽象协调类。

定理 3.1 （可靠性定理）若 $\Gamma\subseteq\mathscr{L}(\mathscr{F})$ 有闭语义树，则Γ为不可满足的。

证明 假定Γ为可满足的，则不难由关于Γ的语义树之结构归纳法知道，对Γ的每棵语义树 T，均有 T 的一个分枝 β 使 $\{A\in\mathscr{L}(\mathscr{F})\mid\beta$ 有标记为 A 的结点$\}$是可满足的。因此 T 不是闭的，这与Γ有闭语义树相矛盾，所以Γ为不可满足的。

例 3 对例 2 中的 Γ_1 和 Γ_2，因为 Γ_1 有闭语义树，所以 Γ_1 为不可满足的，从而由 $\Gamma_1\subseteq\Gamma_2$ 可知，Γ_2 必为不可满足的。但 Γ_2 无闭语义树，因此定理 3.1 之逆命题不成立，故[1]中定理(3201)及其证明是错误的。

定理 3.2 （完备性定理）设 $\mathscr{F}$ 中个体常元最多且 $\Gamma\subseteq\mathscr{L}_0(\mathscr{F})$ 为有穷集。若Γ为不可满足的，则Γ有闭语义树。

证明 假定Γ无闭语义树，则由Γ为有穷集知 $\Gamma\in\widetilde{\mathscr{H}}$。但 $\mathscr{F}$ 中个体常元最多，根据定理 1.1，则Γ为充分纯的，所以由 Smullyan 合一定理可知Γ为协调的，这与Γ为不可满足的矛盾，因此Γ必有闭语义树。

推论 1 设 $\mathscr{F}$ 中个体常元最多且 $\Gamma\subseteq\mathscr{L}_0(\mathscr{F})$ 为有穷集，则Γ为不可满足的当且仅当Γ有闭语义树。

这显然可由定理 3.1 及定理 3.2 直接推出。

在实际应用中，我们只能处理有穷集 $\Gamma\subseteq\mathscr{L}_0(\mathscr{F})$，而且我们也总假定 $\mathscr{F}$ 中个体常元最多，否则可改用 $\mathscr{F}$ 的保守扩张。因此，上述定理及推论指出，可用构造闭语义树的方法证明：

i）有穷集 $\Gamma\subseteq\mathscr{L}_0(\mathscr{F})$ 是不可满足的；

ii) $A \in \mathscr{L}_0(\mathscr{F})$是不可满足的；

iii) $A \in \mathscr{L}(\mathscr{F})$是有效的（等价于$\forall A \in \mathscr{L}_0(\mathscr{F})$是有效的）。

而且这种方法既是可靠的，又是完备的。

4 结束语

本文介绍了一种能直接反驳句子集的语义树方法，并澄清了文[1]中的错误，同时对修正后的完备性定理给出了详细的证明。与通常的归结方法相比，语义树方法对所要反驳的句子集无需进行任何变形预处理，保持了其结构特征，因而整个反驳过程显得直观而自然，具有一定的智能特征。在某些复杂的情况下，特别是在人机交互的条件下，语义树方法可能比归结方法效率更高，能迅速地找到反驳。

参 考 文 献

1 Andrews P B. An Introduction to Mathematical Logic and Type Theory: To Truth Through Proof. Academic Press, 1986

2 Andrews P B. Theorem Proving via General Matings. J ACM, 1981, 28 (2)

3 王兵山等. 数理逻辑. 长沙: 国防科技大学出版社, 1994

The Semantic Tableaux Method and Its Soundness and Completeness

Li Zhoujun Wang Bingshan

(Department of Computer Science)

Abstract

The semantic tableaux given in the book 'An Introduction to Mathematical Logic and Type Theory: To Truth Through Proof' by Andrews is a refutation method which can be directly used for sentence sets. Nevertheless, the soundness and completeness theorem (3201) of the semantic tableaux method and the proving process are incorrect. In this paper, we illustrate and correct the mistake. In addition, we prove the revised theorem of the soundness and completeness.

Key words abstract consistency class, semantic tableaux, soundness, completeness