国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第16卷第3期 1994年9月 Vol. 16 No. 3

# 部分参数不准确的线性系统 $H_\infty$ 状态估计滤波问题*

王正志 肖齐英
(国防科技大学自动控制系 长沙 410073)

**摘 要** 本文研究了部分参数不准确的线性系统的 $H_\infty$ 状态估计滤波问题，或即参数鲁棒性 $H_\infty$ 估计问题。我们先把它简化为带 $\delta$ 参数的对象的 $H_\infty$ 状态估计滤波问题，采用 J 无损分解方法，推导出可解性条件和滤波器的全部显式通解。

**关键词** 参数鲁棒性；$H_\infty$ 估计；$H_\infty$ 标准控制问题；J 无损分解
**分类号** TP13

若线性系统的全部参数能准确地知道，则在已知谱密度的输入噪声和量测噪声作用下，要由输出的测量估计其内部状态，可由著名的卡尔曼滤波器方法解决。但在许多情况下，各噪声源的统计特征难以完全了解，这就需要研究部分统计特征未知时的状态估计问题。在噪声源是有界能量情况下，可以用 $H_\infty$ 方法来估计系统的内部状态。

如果进一步认为对象模型本身具有不确定性，问题就变得更为复杂，经常用 $BL_\infty$ 来界定对象的不确定性。这种具有 $BL_\infty$ 不确定性对象在有界噪声作用下的 $H_\infty$ 状态估计问题，数学上属于 Doyle 等提出 $\mu$ 问题。本文不研究这个问题。

另一种常见的对象不确定性是参数不确定性。这时，对象的模型框架和阶次是准确已知的，但模型中各参数不能准确地知道，仅知道它们各自在一定的实数区间内变动。更广泛地提法是，其中一部分参数是准确知道的，而另一部分参数是不准确的，它们在一定的实数区间内变动。例如，飞机飞行过程中，飞机本身参数能准确地知道，而气动参数则难于准确地知道，仅能知道它们各在一定范围内变动。对于部分参数不确定的对象，在有界能量噪声作用下，如何进行状态估计滤波，将是本文的研究内容。

这个问题具有广泛的应用背景，但有相当的难度。1991 年 Xie，Souza 和 Fu 提出了一种把部分参数不确定性转变为 $H_\infty$ 问题的富有启发性的方法[1]。在该文中他们研究了离散时间域的线性不确定性系统的 $H_\infty$ 估计问题，但他们仅给出了这个问题的一个特解。本文将研究连续时间域上的部分参数不确定的对象 $H_\infty$ 状态估计问题，我们要给出这个参数鲁棒性 $H_\infty$ 估计问题的通解的显式形式。

## 1 问题的提出

考虑连续时间域上的对象，它具有状态空间形式的模型 $P$：

* 1993年8月20日收稿

$$\dot{x} = (A + \Delta A)x + BW \tag{1a}$$

$$y = (C + \Delta C)x + DW \tag{1b}$$

$$z = Lx \tag{1c}$$

其中 $x \in R^n$ 是状态，$W \in R^m$ 是噪声，$y \in R^r$ 是测得的输出，$z \in R^p$ 是被估计的状态变量的组合。$A$、$B$、$C$、$D$ 和 $L$ 是已知的实常数矩阵，各为 $n\times n$、$n\times m$、$r\times n$、$r\times m$、$p\times n$ 维，它们是标称对象的全部参数。我们假定标称对象是稳定的，即 $A$ 是稳定矩阵。(1) 式中 $\Delta A$ 和 $\Delta C$ 表达了可随时间变化的参数不确定性，假设

$$\begin{bmatrix} \Delta A \\ \Delta C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} FE \tag{2}$$

其中 $H_1$、$H_2$、$E$ 为已知的 $n\times b_1$、$r\times b_1$、$b_2\times n$ 维的定常矩阵，它们反映了不确定参数所处的位置和变化幅度。而 $b_1\times b_2$ 维的未知实矩阵 $F$ 满足

$$F^T F \leqslant I \tag{3}$$

$F$ 在单位实球中的变化引起 $\Delta A$ 和 $\Delta C$ 的变化。(2) 式描写了部分参数变化的情况。

我们希望设计一个用于估计 $z$ 的滤波器 $Q$，

$$\dot{x}_e = A_e x_e + K_e y \tag{4a}$$

$$z_e = L_e x_e \tag{4b}$$

这里 $x_e$ 是滤波器的内部状态，矩阵 $A_e$、$K_e$、$L_e$ 待定，估计误差定义为

$$e = z - z_e = Lx - L_e x_e \tag{5}$$

对象 $P$ 和源滤波器 $Q$ 组成复合系统，其状态方程可紧凑地写为

$$\dot{\xi} = (A_c + H_c F E_c)\xi + B_c W \tag{6a}$$

$$e = C_c \xi \tag{6b}$$

其中

$$\begin{cases} \xi = \begin{bmatrix} x \\ x_e \end{bmatrix}, A_c = \begin{bmatrix} A & 0 \\ K_e C & A_e \end{bmatrix} \\ B_c = \begin{bmatrix} B \\ K_e D \end{bmatrix}, C_c = \begin{bmatrix} L & -L_e \end{bmatrix} \\ H_c = \begin{bmatrix} H_1 \\ K_e H_2 \end{bmatrix}, E_c = \begin{bmatrix} E & 0 \end{bmatrix} \end{cases} \tag{7}$$

于是从噪声 $W$ 到估计误差 $e$ 的传递函数 $T(s)$ 为

$$T(s) = C_c[sI - (A_c + H_c F E_c)]^{-1} B_c \tag{8}$$

对于有界能量噪声 $W$，可定义 $H_\infty$ 估计问题

$$\| T(s) \|_\infty < \gamma \tag{9}$$

即要设计滤波器 $Q$，满足 (9) 式的要求，从而对于各种噪声均有较小的估计误差 $e$。

但由于对象模型 $P$ 和传递函数 $T(s)$ 中含有未知有界实矩阵 $F$，造成了处理上的困难，为了克服这个困难，我们考虑如下带有正参数 $\delta$ 的对象 $\overline{P}_\delta$

$$\dot{\overline{x}} = A\overline{x} + [B \quad \gamma\delta^{-1}H_1]\overline{W} \tag{10a}$$

$$\overline{y} = C\overline{x} + [D \quad \gamma\delta^{-1}H_2]\overline{W} \tag{10b}$$

$$\bar{z} = \begin{bmatrix} L \\ \delta E \end{bmatrix} \bar{x} \tag{10c}$$

其中噪声 $\overline{W} \in R^{m+b1}$，输出 $\bar{z} \in R^{p+b2}$。在对象 $\overline{P}_\delta$ 中，若取

$$\overline{W} = \begin{bmatrix} W \\ \delta\gamma^{-1} F E \bar{x} \end{bmatrix} \tag{11}$$

就有对象模型 $\overline{P}_\delta$ 等同于 $P$。但(10)式对于问题的解决没有什么帮助。故我们不限定 $\overline{W}$ 取(11)式的形式，而把 $\overline{W}$ 看作未知的有界能量噪声。采用(4)式的滤波器 $Q$，用

$$\bar{z}_e = \begin{bmatrix} z_e \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_e \\ 0 \end{bmatrix} x_e \tag{12}$$

来估计 $\overline{P}_\sigma$ 的输出 $\bar{z}$ 所产生的估计误差为

$$\bar{e} = \bar{z} - \bar{z}_e = \begin{bmatrix} L & -L_e \\ \delta E & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ x_e \end{bmatrix} \tag{13}$$

这里 $\bar{e} \in R^{p+b2}$带参数 $\delta$ 的对象 $\overline{P}_\delta$ 和滤波器 $Q$ 组成的复合系统可紧凑地写为

$$\dot{\bar{\xi}} = A_c \bar{\xi} + \overline{B}_c \overline{W} \tag{14a}$$

$$\bar{e} = \overline{C}_c \bar{\xi} \tag{14b}$$

其中

$$\overline{B}_c = [B_c \quad \gamma\, \delta^{-1} H_c] \tag{15}$$

$$\overline{C}_c = \begin{bmatrix} C_c \\ \delta E_c \end{bmatrix} \tag{16}$$

从有界能量噪声 $\overline{W}$ 到估计误差 $\bar{e}$ 的传递函数为

$$\overline{T}_\delta(s) = \overline{C}_c (sI - A_c)^{-1} \overline{B}_c \tag{17}$$

**引理 1**　线性系统

$$R(s) = C(sI - A)^{-1} B \tag{18}$$

满足 $H_\infty$范数不等式

$$\| R(s) \|_\infty < \gamma \tag{19}$$

当且仅当存在正定对称矩阵 $X$ 满足 Riccati 不等式

$$A^T X + XA + C^T C + \gamma^{-2} X B B^T X < 0 \tag{20}$$

**定理 1**　若存在一个正实数 $\delta$，使得带参数 $\delta$ 的对象 $\overline{P}_\delta$ 被滤波器 $Q$ 估计的误差传递函数 $\overline{T}_\sigma(s)$满足

$$\| \overline{T}_\delta(s) \|_\infty < \gamma \tag{21}$$

则对于原部分参数不确定的对象 $P$，该滤波器产生的误差传递函数 $T(s)$满足

$$\| T(s) \|_\infty < \gamma \tag{22}$$

**证明**　若(21)式成立，把引理 1 用到(21)上，就存在正定对称矩阵 $X$ 满足

$$A_c^T X + X A_c + \begin{bmatrix} C_c \\ \delta E_c \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C_c \\ \delta E_c \end{bmatrix} + \delta^{-2} X [B_c \quad \gamma\delta_{-1} H_c][B_c \quad \gamma\delta_{-1} H_c]^T X < 0 \tag{23}$$

现在注意到

$$E_c^T F^T H_c^T X + X H_c F E_c \leqslant \delta^{-2} X H_c H_c^T X + \delta^2 E_c^T F^T F E_c \leqslant \delta^{-2} X H_c H_c^T X + \delta^2 E_c^T E_c \tag{24}$$

从而有

$$(A_c + H_c F E_c)^T X + X(A_c + H_c F E_c) + C_c^T C_c + \gamma^{-2} X B_c B_c^T X < 0 \tag{25}$$

再由引理 1 可知(22)式成立。

## 2 问题的通解

上节证明了，解决了带参数 $\delta$ 的对象 $\overline{P}_\delta$ 的滤波估计问题(21)，就可以保证部分参数不确定对象 $P$ 的滤波估计精度(22)。由(10)和(13)知

$$\gamma^{-1}\overline{T}_\delta(s) = T_1 - T_2 Q T_3 \tag{26}$$

其中

$$T_1 = \begin{bmatrix} L(sI - A)^{-1}[\gamma^{-1}B \quad \delta^{-1}H_1] \\ \delta E(sI - A)^{-1}[\gamma^{-1}B \quad \delta^{-1}H_1] \end{bmatrix} \tag{27}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} I_{p\times p} \\ O_{b2\times p} \end{bmatrix} \tag{28}$$

$$T_3 = C(sI - A)^{-1}[\gamma^{-1}B \quad \delta^{-1}H_1] + [\gamma^{-1}D \quad \delta^{-1}H_2] \tag{29}$$

$$Q = L_e(sI - A_e)^{-1}K_e \tag{30}$$

由(26)知，(21)是模型匹配问题，我们把它改写到 $H_\infty$ 标准控制问题的框架中[2]。

此时广义对象为

$$G(s) = \left\{A, [B_1 \quad B_2], \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D_{11} & D_{22} \\ D_{21} & 0 \end{bmatrix}\right\} \tag{31}$$

其中

$$\begin{cases} B_1 = [\gamma^{-1}B \quad \delta^{-1}H_1], B_2 = O_{n\times(p-b2)} \\ C_1 = \begin{bmatrix} L \\ \delta E \end{bmatrix}, C_2 = C \\ D_{11} = 0_{(p+b2)\times(m+b1)}, D_{12} = [0_{p\times p} \quad O_{b2\times p}]^T \\ D_{21} = [\gamma^{-1}D \quad \delta^{-1}H_2] \end{cases} \tag{32}$$

由于标称对象的 $A$ 矩阵是稳定的，可直接写出

$$\begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & 0 \end{bmatrix} = \left\{\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{12} & 0 \end{bmatrix}\right\} \tag{33}$$

现在 $H_\infty$ 标准控制问题已有深入的研究。我们问题中的 $T_2$ 是 $(p+b_2)\times p$ 维矩阵，它是高矩阵，其中 $b_2$ 是参数不确定性因子 $F$ 的列秩。而 $T_3(s)$ 是 $r\times(m+b_1)$ 维矩阵，其中 $m$ 是噪声 $W$ 的维数，$b_1$ 是 $F$ 的行秩，$r$ 是测量 $y$ 的维数。很明显经常有 $m+b_1>r$，所以 $T_3(s)$ 经常为扁矩阵，所以(21)是一个四块的 $H_\infty$ 模型匹配问题，Kimura，Lu 和 Kawatani 于 1991 年提出了四块 $H_\infty$ 标准控制问题的 J 无损分解的方法[3]。基本思路如下：

找出 $T_2(s)$ 的规范化左化零式 $V_a(s)$，及 $T_3(s)$ 的右化零式 $V_b(s)$。用它们构成 $(J, J')$ 酉阵

$$\Theta_0 = \begin{bmatrix} \tilde{V}_a & T_1 V_b \\ \tilde{T}_1 \tilde{V}_a & V_b \end{bmatrix} \tag{34}$$

它满足$(J, J')$酉关系

$$\tilde{\Theta}_0 J \Theta_0 = J' \tag{35}$$

然后找出$\Theta_0$的$J$正交补$\Theta_1$. 再求出么模矩阵$\Pi_a$，它是稳定且具有最小相位的矩阵，使得

$$\begin{bmatrix} -T_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -T_1 \\ 0 & T_3 \end{bmatrix} \Theta_1 \tag{36}$$

成立。把$\Theta_1$和$\Pi_a$划分为适当的四块：

$$\Theta_1 = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \end{bmatrix} \begin{array}{l} p+b2 \\ m+b1 \end{array} \\ \begin{array}{cc} p & r \end{array} \end{array} \tag{37}$$

$$\Pi_a = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{bmatrix} \begin{array}{l} p \\ r \end{array} \\ \begin{array}{cc} p & r \end{array} \end{array} \tag{38}$$

于是滤波器$Q$的通式为：

$$Q = (\pi_{11} S + \pi_{12})(\pi_{21} S + \pi_{22})^{-1}, S \in BH_{\infty}^{p \times r} \tag{39}$$

而滤波估计的误差的通式为

$$\overline{T}_{\delta}(s) = \gamma[\theta_{11} S + \theta_{12} \quad T_1 V_b][\theta_{21} S + \theta_{22} \quad V_b]^{-1} \tag{40}$$

下面将按此思路进行参数鲁棒性$\mathrm{H}_\infty$滤波问题求解的具体计算。由于计算过程十分冗长，本文仅列出各步的主要计算结果。

首先定义$D_{12}^{+}$为$D_{12}$的左逆，$D_{12}^{\perp}$为$D_{12}$的左化零式，它们满足

$$\begin{bmatrix} D_{12}^{+} \\ D_{12}^{\perp} \end{bmatrix} [I - D_{11} D_{11}^{T}] D_{12}^{\perp LT} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \tag{41}$$

由(32)知

$$D_{12}^{\perp} = [0 \quad I_{b2}] \tag{42}$$

$$D_{12}^{+} = [I_p \quad 0] \tag{43}$$

现在我们开始求规范化左化零式$V_a(s)$，易知

$$A_a = A - B_2 D_{12}^{+} C_1 = A \tag{44}$$

又从(28)式知$T_2(s)$无零点，当然也就没有稳定零点，从而$(D_{12}^{\perp} C_1 - A_a)$就没有不可检测的模式，这时比较简单。只需解出 Riccati 方程

$$A X_a + X_a A^T + \delta^2 X_a E^T E X_a + \gamma^{-2} B B^T + \delta^{-2} H_1 H_1^T = 0 \tag{45}$$

的这样的对称解$X_a$，它使得

$$\hat{A}_a = A + \delta^2 X_a E^T E \tag{46}$$

为全不稳定。这样可算出规范化左化零式为

$$V_a = \{A + \delta^2 X_a E^T E, \delta X E^T, \delta E, I_{b2}\} \tag{47}$$

为了求出规范化右化零式$V_b$，先计算出

$$A_b = A - B_1 D_{12}^{+} C_2 = A - [\gamma^{-1} B \quad \delta^{-1} H_1][\gamma^{-1} D \quad \delta^{-1} H_2]^{+} C \tag{48}$$

困难的问题在于，由(29)知 $T_c(s)$ 可能具有稳定零点，它们将成为 $(-A_b, B_1, D_{\frac{1}{12}})$ 的不可稳定的模式，为了剔除这些模式，作相似变换

$$T_b = [\hat{B}_b \quad \hat{N}_b], \qquad T_b^{-1} = \begin{bmatrix} R_b \\ N_b \end{bmatrix} \tag{49}$$

使得：

$\hat{N}_b[A_bR_b \quad B_1D_{\frac{1}{12}}]=0$；$\hat{N}_bA_bN_b$ 是稳定的；$(-R_bA_8b\hat{R}_b, R_bB_1D_{12}^{\perp})$ 是可稳定的。

于是只要考虑可稳定部分所对应的 Riccati 方程

$$X_b(R_bA_b\hat{R}_b) + (R_bA_b\hat{R}_b)^TX_b + X_b(R_bB_1D_{12}^{\perp})(R_bB_1D_{12}^{\perp})^TX_b$$
$$+ \hat{R}_b^T(L^TL + \delta^2E^TE - C^T[\gamma^{-1}D \quad \delta^{-1}H_2)^{+T}[\gamma^{-1}D \quad \delta^{-1}H_2]^- C)\hat{R}_b = 0 \tag{50}$$

求出它的这样的对称解 $X_b$，使得

$$\hat{A}_b = R_bA_b\hat{R}_b - R_bB_1D_{12}^{\perp}K_b \tag{51}$$

为全不稳定，其中

$$K_b = - D_{12}^{\perp T}B_1^TR_b^TX_b \tag{52}$$

这样可算出规范化右化零式为

$$V_b(s) = \{\hat{A}_b, R_bB_1D_{12}^{\perp}, \quad -(D_{12}^{\dagger}R_b + D_{12}^{\dagger}C_2\hat{R}_b), D_{12}^{\dagger}\} \tag{53}$$

由 $V_a$ 和 $V_b$ 的表示式，可写出 $\Theta_0$ 的具体表达式，再算出 $\Theta_0$ 的 $J$ 正交补 $\Theta_1$ 的具体表达式，再由(36)算出 $\Pi_a$ 的具体表达式，可以证明我们这样求出的 $\Pi_a$ 是么模矩阵。这里的运算过于冗长，限于篇幅，我们仅写出最后的结果，把它们总结在下述的定理中。

**定理 2** 带参数 $\delta$ 的对象的 $\overline{P}_\delta$ 的 $H_\infty$ 滤波器估计问题(21)的可解性条件为

$$\begin{bmatrix} X_a & \hat{R}_b \\ \hat{R}_b^T & X_b \end{bmatrix} > 0 \tag{54}$$

它的滤波器 $Q$ 的通解显式为

$$Q = [\pi_{11}S + \pi_{12}][\pi_{21}S + \pi_{22}]^{-1}, S \in BH_\infty^{p\times r} \tag{55}$$

其中

$$\pi_{11} = I_p - LX_a(sI + A^T + \delta^2E^TEX_a)^{-1}\Delta^{-1}\hat{R}_bX_b^{-1}\hat{R}_b^TL^T,$$
$$\pi_{12} = LX_a(sI + A^T + \delta^2E^TEX_a)^{-1}\Delta^{-1}(B_1 + \hat{R}_bX_b^{-1}\hat{R}_b^TC^TD_{21}^{+T})D_{21}^{+}(D_{21}^{+T}D_{21}^{+})^{-1/2}$$
$$\pi_{21} = (CX_a + \gamma^{-2}DB^T + \delta^{(-2)}H_2H_1^T)(sI + A^T + \delta^2E^TEX_a)^{-1}\Delta^{-1}\hat{R}_bX_b^{-1}\hat{R}_b^TL^T$$
$$\pi_{22} = \{I + (CX_a + \gamma^{-2}DB^T + \delta^{-2}H_2H^T)(sI + A^T + \delta^2E^TEX_a)^{-1}\Delta^{-1}$$
$$(B_1 + \hat{R}_bX_b^{-1}\hat{R}_b^TC^TD_{21}^{-T}\}D_{21}^{-T}(D_{21}^{-T}D_{21}^{+})^{-1/2} \tag{56}$$

式中 $X_a$ 和 $X_b$ 分别为 Riccati 方程(45)和(50)的解。$R_b$ 和 $\hat{R}_b$ 来自剔除 $T_c(s)$ 稳定零点的相似变换(49)，其它均来自对象的状态表达式(1)(2)，特别再次写出

$$B_1 = [\gamma^{-1}B \quad \delta^{-1}H_1] \tag{32a}$$
$$D_{21} = [\gamma^{-1}D \quad \delta^{-1}H_2] \tag{32g}$$
$$\Delta = X_a - \hat{R}_bX_b^{-1}\hat{R}_b^T \tag{57}$$

## 3 结 论

本文研究了连续时间域上的部分参数不准确的线性系统的 $H_\infty$ 状态的估计滤波问

题，可简称它为参数鲁棒性 $H_\infty$ 估计问题。我们先把它简化为带 $\delta$ 参数的对象的 $H_\infty$ 状态估计滤波问题。这是四块情形的模型匹配问题。我们采用 $J$ 无损分解法，经过冗长的运算，得到了可解性条件和滤波器 $Q$ 的显式通解，由通解式可看到，部分滤波器可能具有直通分量，从滤波角度来看，不能算是好的滤波器，这是 $H_\infty$ 指标的保守性所致。如果我们在满足 $H_\infty$ 指标要求下，进一步作 $H_2$ 指标优化，就成为 $H_\infty/H_2$ 滤波问题，可从满足 $H_\infty$ 要求的所有滤波器中挑出具有其它更优性能的滤波器，将不会具有直通分量。

通常大家认为，$H_\infty$ 方法适用于研究具有 $BL_\infty$ 不确定性对象的鲁棒性问题，而难以应用到具有实参数不确定性的对象的鲁棒性问题上。但是由本文采用的方法看出，$H_\infty$ 方法可以较好的用于解决对象模型中各实参数存在区域不确定性造成的鲁棒性问题。这个新领域中还有许多问题值得研究，具有很好的实际工程应用前景。

## 参 考 文 献


1 L. Xie C E, De Souza M Fu. $H_\infty$ Estimatiion for Discrete-time Lime Limear Uncertain System. Inter J of Robust and Nonlinear Control 1991, 1: 111～123

2 B A Franica. A Course in $H_\infty$ Control Theory, Springer-Verlag, 1987

3 H Kimura, Y Lu Rawatani. On the Structure of $H_\infty$ Control Systems and Related Extension A C 1991, 36 (6): 653～667


# $H_\infty$ State Estimation Filter Problem for Linear Systems with Part of the Parameters Uncertainty


Wang Zhengzhi Xiao Qiying

(Depantment of Automatic Control)



### Abstract

This paper is concerned with $H_\infty$ state estimation filter problem for linear systems with part of the parameters uncertainty — the parameter robust $H_\infty$ estimation problem. It can be simplified to a $H_\infty$ state estimation problem for a plant with a scaling parameter $\delta$. We deduce a solvability condition and give an explicit expression of the complete solution set for the robust $H_\infty$ filter by J—Lossless factorization method.



**Key words** parameter robustness; $H_\infty$ estimation; $H_\infty$ standard control problem; J lossless factorization