国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第16卷第3期　1994年9月　Vol. 16 No. 3

# 关于稳定p型Banach空间中有界Borel测度的一个定理*

李　兵

（国防科技大学系统工程与数学系　长沙　410073）

**摘　要**　本文推广了E. Dettweiler[1]关于p型Banach空间的结论，得到了在稳定p型Banach空间上，有界Borel测度为某个无穷可分p稳定测度的Levy测度的一个充分条件。

**关键词**　稳定p型Banach空间，p稳定随机变量，Levy测度

**分类号**　O211

首先我们给出一些定义。

设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为一概率空间，称实值随机变量$\theta$为具有参数$\sigma$的$p$稳定随机变量（其中$\sigma>0$，$1\leqslant p\leqslant 2$）．若$\mathrm{E}e^{it\theta}=\exp\left(-\frac{\sigma|t|^p}{2}\right)$，$(\forall\ t>0)$，如果参数$\sigma=1$，称其为标准的$p$稳定随机变量。

**定义**　设$1\leqslant p\leqslant 2$，称Banach空间$E$为稳定$p$型的，若对于任意的$(x_i)\subset E$，有“$\Sigma\|x_i\|^p<\infty\Rightarrow\Sigma\theta_i x_i$ a.s.收敛”，其中$(\theta_i)$为独立同分布的标准的$p$稳定随机变量列。

设$X$为$E$值随机变量，记$X(P)$表示由$X$在$(\Omega,\mathscr{F},P)$上诱导出的测度。若测度$\mu$为$p$稳定随机变量所诱导，则称$\mu$为$p$稳定测度。记$\mathscr{P}(E)$表示所有$E$上的Radon测度，$\mu^b(E)$表示所有$E$上有界正Radon测度。若$G\in\mu^b(E)$，称测度$e(G)\triangleq e^{-\|G\|}\cdot\left(\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!}G^k\right)$为Poisson测度，（其中$\|G\|$表示$G$的变差，$G^k$表示$G$的$k$重卷积，$k=1,2,\cdots$，$G^0\triangleq\varepsilon_0$，即0点的单点测度）。$E$上的$p$稳定测度$\mu$称为是无穷可分的，若对于任何正整数$n$，存在$E$上的概率测度$\mu_n$，使得$\mu=\mu_n^n$．称$E$上的测度$F$为某无穷可分概率测度的Levy测度，若存在一0点的邻域基$(u_n)$，测度$G_n\triangleq F|_{u_n^c}$为有界Radon测度，且存在点$a_n\in E$，使得$(e(G_n)*\varepsilon_{a_n})$为一致紧的(uniformly tight)．这里$*$表示两测度的卷积，关于Levy测度的各种等价定义可参见文[1]～[3].

下面给出本文的主要结果。

**定理**　设$E$为稳定$p$型Banach空间，$1\leqslant p\leqslant 2$，对于任何$(E,\mathscr{B}(E))$上的测度$F$，若满足以下条件：(1) 存在$E$的紧凸的圆形子集$K$，使得$F|_{K^c}$为有界Radon测度；(2)

---

* 1993年9月28日收稿

$\int_B \|x\|^p \mathrm{d}F(x) < \infty$. (其中 $B$ 为 $E$ 的单位球)，则 $F$ 必为一满足 $\int_E \|x\|^p \mathrm{d}\mu(x) < \infty$ 的无穷可分 $p$ 稳定测度 $\mu$ 的 Levy 测度。

**证明** 设 $F$ 为 $(E,\mathscr{B}(E))$ 上的测度且满足条件(1)、(2)，若我们能证明：$F|_K$ 为某无穷可分 $p$ 稳定测度 $\mu$ 的 Levy 测度，则由条件(1)即知：$F$ 亦为某无穷可分 $p$ 稳定测度 $\mu$ 的 Levy 测度。因此下面不妨假设：在一给定的紧凸的圆形子集 $K$ 之外 $F$ 为 0. 由条件(2)，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^p} F\left(\frac{1}{n}B - \frac{1}{n+1}B\right) \leqslant \int_B \|x\|^p \mathrm{d}F(x) < \infty$$

故 $F = \sum_{k=1}^{\infty} G_k$. 这里 $G_k \in \mu^b(E)$，且 $\|G_k\| \leqslant M$ $(k=1,2,\cdots)$. 由前面提到的[1]中定理知，为证此定理，只需证明：存在 $(a_n) \subset E$，使得 $\left(e\left(\sum_{k=1}^{n} G_k\right) * \varepsilon_{a_n}\right)$ 弱收敛于 $p$ 稳定测度 $|\mu|^2 \triangleq \mu * \bar{\mu}$，且 $\int_E \|x\|^p \mathrm{d}|\mu|^2(x) < \infty$，(这里 $\bar{\mu}(A) \triangleq \mu(-A)$，$\forall\, A \in \mathscr{B}(E)$). 从而只需证明：存在一概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 及其上的 $E$ 值随机变量列 $(X_n)$，$X_n(p) \triangleq e\left(\sum_{k=1}^{n}(G_k + \bar{G}_k)\right)$ $(n=1,2,\cdots)$，使得 $X_n$ 依 $L_p$ 范数收敛于一 $p$ 稳定的 $E$ 值随机变量 $X$，(即 $X(P)$ 为一 $p$ 稳定测度)。

设 $(R_+,\mathscr{B}(R_+),v)$ 为一给定的概率空间，令 $\theta_t$ 为其上的参数为 $t$ 的实值 $p$ 稳定随机变量，$(t \in R_+)$，$\pi_t \triangleq \theta_t(v)$ $(t \in R_+)$，则 $(\pi_t)_{t \in R_+}$ 为 $R_+$ 上的概率测度半群。又因 $H_k \triangleq G_k + \bar{G}_k$ 具有紧支撑，故由文[2]引理(2.2)知：$\forall\, k \in N$. 存在一概率空间 $(\Omega_k,\mathscr{F}_k,P_k)$ 及其上的 $E$ 值随机变量 $z_k$，$z_k(P_k) = e(H_k)$. $\forall\, \varepsilon > 0$ 还存在其上的 $E$ 值随机变量 $\widetilde{Z}_k$ 具有如下形式：$\widetilde{Z}_k = \sum_{i \in I_k} \theta_{\lambda_{k_i}} b_{k_i}$ (其中 $I_k$ 为正整数集，$\mathrm{card}(I_k) < \infty$，$\lambda_{k_i} > 0$，$b_{k_i} \in E$)，使得

$$\int \|Z_k - \widetilde{Z}_k\|^p \mathrm{d}P_k < \infty, \quad \left|\int_E \|x\|^p \mathrm{d}H_k(x) - \int_E \|x\|^p \mathrm{d}\widetilde{H}_k(x)\right| < \varepsilon$$

其中 $\widetilde{H}_k \triangleq \sum_{i \in I_k} \lambda_{k_i} \varepsilon_{b_{k_i}}$. 我们不妨可假设 $\widetilde{Z}_k$ 亦是对称的，$(k=1,2,\cdots)$.

现在我们定义概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P) \triangleq \left(\prod_{k=1}^{\infty} \Omega_k,\ \prod_{k=1}^{\infty} \mathscr{F}_k,\ \prod_{k=1}^{\infty} P_k\right)$. 相应于 $Z_k$ 及 $\widetilde{Z}_k$ 分别定义 $\Omega$ 上的随机变量 $Y_k$ 及 $\widetilde{Y}_k$，如通常通过 $\Omega \to \Omega_k$ 的投影可得。这样对任意的 $k \in N$，我们可得 $\Omega$ 上的随机变量 $\widetilde{Y}_k$，满足

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_\Omega \|Y_k - \widetilde{Y}_k\|^p \mathrm{d}P < \infty \tag{1}$$

式中 $\widetilde{Y}_k \triangleq \sum_{i \in I_k} \theta_{\lambda_{k_i}} b_{k_i}$，$\lambda_{k_i} > 0$，$b_{k_i} \in E$，$\mathrm{card}(I_k) < \infty$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\int_E \|x\|^p dH_k(x) - \int_E \|x\|^p d\widetilde{H}_k(x)\right| < \infty \tag{2}$$

式中 $\widetilde{H}_k \triangleq \sum_{i \in I_k} \lambda_{k_i} \varepsilon_{b_{k_i}}$.

注意 $(Y_k)$ 与 $(\widetilde{Y}_k)$ 是相互独立的，$Y_k$ 与 $\widetilde{Y}_k$ 的均值皆为0，$(k=1,2,\cdots)$，且具有有限 $p$

阶矩(由假设及(1)易知)。令 $\tilde{X}_n=\sum_{k=1}^{n}\tilde{Y}_k(n=1,2,\cdots)$，若我们能证明$(\tilde{X}_n)$是 $L_p$Cauchy 序列，由(1)知：$\left(X_n\triangleq\sum_{k=1}^{n}Y_k\right)$ 亦是 $L_p$Cauchy 序列。另外由(2)知：测度 $\tilde{H}\triangleq\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{H}_k$ 亦满足 $\int_B\|x\|^p\mathrm{d}\tilde{H}(x)<\infty$．最后我们注意：$\tilde{X}_n$ 为 $p$ 稳定随机变量$(n=1,2,\cdots)$（即 $\tilde{X}_n(P)$为 $p$ 稳定测度），从而下面我们只需证明：$(\tilde{X}_n)$为 $L_p$Cauchy 序列。

令 $m,n\in N,m\geqslant n>1$，有

$$\int_\Omega\|\tilde{X}_m-\tilde{X}_n\|^p\mathrm{d}P=\int_\Omega\|\sum_{k=n}^{m}\tilde{Y}_k\|^p\mathrm{d}P\leqslant\int_\Omega\sum_{k=n}^{m}\|\tilde{Y}_k\|^p\mathrm{d}P\leqslant(m-n)^{p-1}\sum_{k=n}^{m}\int_\Omega\|\tilde{Y}_k\|\mathrm{d}P$$

$$\leqslant(m-n)^{p-1}\sum_{k=n}^{m}\int_\Omega\|\sum_{i\in I_k}\theta_{\lambda_{k_i}}b_{k_i}\|^p\mathrm{d}P=(m-n)^{p-1}\sum_{k=n}^{m}\int_\Omega\|\sum_{i\in I_k}\left(\frac{\theta_{\lambda_{k_i}}}{\lambda_{k_i}^p}\right)(\lambda_{k_i}^{1/p}b_{k_i})\|^p\mathrm{d}P$$

$$\overset{(*)}{\leqslant}(m-n)^{p-1}\sum_{k=n}^{m}C\cdot\sum_{i\in I_k}\lambda_{k_i}\|b_{k_i}\|^p=C(m-n)^{p-1}\int_E\|x\|^p\mathrm{d}\left(\sum_{k=n}^{m}\tilde{H}_k\right)(x)$$

$(*)$成立是由于$\left(\frac{\theta_{\lambda_{k_i}}}{\lambda_{k_i}^p}\right)$为独立同分布的标准实值 $p$ 稳定随机变量列，且 $E$ 是稳定 $p$ 型的。

这样由题设条件及(2)知：当 $m$，$n\to\infty$时，上式收敛于0。故$(\tilde{X}_n)$为 $L_p$Cauchy 序列，从而$(X_n)$依 $L_p$ 范数收敛于一 $p$ 稳定随机变量 $X$。(证毕)。

## 参 考 文 献


1 E Dettweiler. Grenzwerstatze fur Wahrschein Lichkeitsma auf Badrikianschen Raumen. Z W，1976，34：285～311

2 E Dettweiler. A Characterization of the Banach Spaces of Type p by Levy measures. Math Z，1977，157：121～130

3 M B Marcus，W A Woycznsky. Stable Measures and Central Limit Theorems in Spaces of Stable Type，TAMS，1979，25：71～102


# A Principle of the Bounded Borel Measurement in the Banach space of Stable Type p


Li Bing

(Department of Systems Engineering and Appliey Mathematics)



**Abstract**

In this paper，we generalized the result of E. Dettweiler for the Banach space of type p，and obtain a sufficient condition on which a bounded Borel measure in the Banach space of stable type p is a Levy measurement of an infinitely divisible p stable measure.



**Key words** Banach space of stable type p，p stable random variable，Levy measure