国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第16卷第3期　1994年9月　Vol. 16 No. 3

标准误差的整体认识及运用*

宁敏东
（洛阳师范专科学校　洛阳）

摘　要　本文从物理量的测量角度出发，将标准误差在直接测量、间接测量、误差分析、结果处理等方面贯通一体，予以阐述和讲解，并综合了不同教材的不同说法，纠正了误差的不正确表示及概念上的模糊理解，从而建立起标准误差的整体认识和正确使用方法。

关键词　等精度，直接测量，间接测量，标准误差
分类号　TH701

近年来，新版本的物理实验教材开始介绍标准误差，标准误差已在物理测量中逐步采用。由于长期对平均误差的使用习惯，以及标准误差教材阐述较少，甚至存在说法不一、带有片面性，致使在不同程度上对标准误差存在着含糊感。本文参阅有关文献，试图对标准误差在物理测量中的整体认识和运用作出综合阐述。

1　直接测量中的标准误差

物理量的测量分为直接测量和间接测量，直接测量又分为多次测量和一次测量。直接测量的标准误差指的是多次等精度测量的标准误差。设一组等精度测量列 X_1，X_2，X_3，…，X_i，…，X_n，其算术平均值为 $\overline{X}$，偏差为 ν，而真值为 a，真误差为 ε，误差理论推导出测量列的标准误差的公式有：

$$\delta=\sqrt{\frac{\Sigma\varepsilon_i^2}{n}} \tag{1}$$

$$\delta=\sqrt{\frac{\Sigma\nu_i^2}{n-1}} \tag{2}$$

$$\delta_{\overline{X}}=\sqrt{\frac{\Sigma\nu_i^2}{n(n-1)}} \tag{3}$$

1.1　公式意义

(1)式叫做标准误差公式，它是在测量次数 $n\to\infty$ 的条件下推导出来的，服从正态分布。(1)式中的误差 ε_i 反映的是测量值 X_i 与真值 a 的差，即 $\varepsilon_i=X_i-a$. 由于待测量的真值 a 是个未知量，不可能在(1)式的定义下求得标准误差 δ，所以只能说(1)式是个数学期望量，或者说是标准误差的定义式。

由于真值 a 是个未知量，那么用什么量能最合适地取代 a?误差理论指出，测量列的算术平均值 $\overline{X}$ 是 a 的逼近量。平均值 $\overline{X}$ 的计算公式为

* 1994年3月28日收稿

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \tag{4}$$

$\overline{X}$ 又叫最佳值、最可信赖值。(2)式中的 ν_i 反映的是测量值 X_i 与平均值 $\overline{X}$ 的差，即 $\nu_i=X_i-\overline{X}$，ν_i 叫做偏差或残差。所以，(2)式叫做标准偏差、均方根差、贝塞尔公式，有的书上也称它标准误差。(2)式是在有限次测量条件下推导出来的，服从 t 分布，t 分布曲线和正态分布曲线略有不同。式中$(n-1)$称为自由度。(2)式反映的不是测量值的实际误差，而是对测量列作出可靠性的估计，反映数据的离散程度。根据统计结果，测量列中任意一个测量值 X_i，在$(\overline{X}-\delta,\overline{X}+\delta)$区间的置信概率为68.3%。再则，(2)式在测量结果中不能作为误差表示。按照(2)式计算 n 次直接测量的标准误差是可以实现的，所以，在技术测量以及误差处理中(2)式都被广泛采用。

(1)、(2)式间关系。由于真值 a 在确定上的难度限制，所以采取了 a 的逼近值 $\overline{X}$，使得标准误差由(1)的定义式过渡到(2)的实用式。当测量次数 $n\to\infty$时，误差理论推导出(1)、(2)式是个等量关系，即

$$\frac{\Sigma\varepsilon_i^2}{n}=\frac{\Sigma\nu_i^2}{n-1}=\delta^2$$

亦即

$$\delta=\sqrt{\frac{\Sigma\varepsilon_i^2}{n}}=\sqrt{\frac{\Sigma\nu_i^2}{n-1}}$$

(3)式叫做算术平均值的标准误差，有的书上又称作算术平均值的标准偏差。误差理论证明，测量列的标准误差 δ 与算术平均值的标准误差 $\delta_{\overline{X}}$ 有下面关系：

$$\delta_{\overline{X}}=\frac{\delta}{\sqrt{n}} \tag{5}$$

若用偏差 ν_i 表示，则可得出(3)式，即

$$\delta_{\overline{X}}=\frac{\delta}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{\Sigma\nu_i^2}{n(n-1)}},$$

从(5)式看出：①$\delta_{\overline{X}}$ 较 δ 小了 $\sqrt{n}$ 倍，表明测量值平均以后数值更加集中，同时描述的测量结果 $\overline{X}$ 精密度也高。所以，在物理测量中通常将 $\delta_{\overline{X}}$ 作为测量结果的误差估计，即 $X=\overline{X}\pm\delta_{\overline{X}}$。②由于 $\delta_{\overline{X}}$ 与 $\sqrt{n}$ 成反比，即 n 增大一定时 $\delta_{\overline{X}}$ 趋向某一值，所以过多的测量次数并不会明显提高测量结果 $\overline{X}$ 的精密度。如在科学研究中 n 取10～20次，在物理测量中 n 取4～20次。

综观标准误差，(1)式是定义式；(2)式是对测量值作出置信度评价；(3)式是对测量结果作出的误差估计。

1.2 粗大误差的剔除

测量列任一测量值 X_i 的误差落在$\pm\delta$区间置信概率为68.3%，落在$\pm2\delta$区间为95.5%，落在$\pm3\delta$区间为99.7%。因此，一般将3δ作为偶然误差的误差界，超过误差界的测量值便认为是粗大误差。测量列中如果含有粗大误差，将会影响测量结果的精密度，所以是要剔除（舍去）的。粗大误差的检验及剔除，通常采用的方法是肖维勒(chauvenet)准则。肖维勒准则提供了一个 n 次测量系数 k_n，系数 k_n 与标准误差 δ 的积 $k_n\delta$ 作为检验粗大误差的标准。凡$|X_i-\overline{X}|>k_n\delta$ 的测量，就是要被剔除的误差。粗大误差不是剔除一次就算了事，而是将新组成的剔除标准再进行比较，直至测量列不再存在粗大误差。此时得出的测量结果精密度将是比较高的。

1.3 一次测量的误差估计

上面着重说的是在等精度条件下的多次测量标准误差。然而在直接测量中，有许多量不可能进行多次重复测量；也有一些量一次就能精确测量，并对间接测量结果影响很小，如此情况都属一次测量。考虑到一次测量在实际工作中又会经常出现，以及在下面讨论的间接测量标准误差中也要用到，故将一次测量的误差估计方法也作一简要叙述。

一次测量的误差来源很多，具有很大的随机性，它包含着系统误差、偶然误差和最大误差。一般在

正确使用测量用具的前提下，一次测量的误差估计至少不能小于量具最小分度值的一半。如米尺、秒表、天平等量具就属于这种情形。在使用电工仪表时，误差主要由仪表的级别所决定。我国电表准确度等级分为七个级别，即±0.1、±0.2、±0.5、±1.0、±1.5、±2.5、±5.0级。电表指示某一值时的最大误差 Δm 为

$$\Delta m = \pm A_m \cdot K\%$$

A_m 为电表量程，K 为电表的准确度等级。

2 间接测量中的标准误差

设间接测量量 N 的函数关系为

$$N = f(X_1, X_2, \cdots, X_m)$$

$X_1, X_2, \cdots X_m$ 为独立的物理量。间接测量的标准误差，是由各独立量（直接测量）的标准误差传递而成。所以，由误差理论推导出的间接测量标准误差公式为

$$\delta_N^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\right)^2 \delta_{X_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\right)^2 \delta_{X_2}^2 + \cdots\cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial X_m}\right)^2 \delta_{X_m}^2$$

或

$$\delta_N = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\right)^2 \delta_{X_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\right)^2 \delta_{X_2}^2 + \cdots\cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial X_m}\right)^2 \delta_{X_m}^2} \tag{6}$$

2.1 公式意义

(6)式是间接测量的标准误差传递公式。其中各直接测量的误差应为标准误差。但是，在实际测量中不可能对所有量都进行多次测量，其中有的量可能会是一次测量。也就是说在(6)式中，直接测量有多次测量的标准误差 δ，也有一次测量误差 Δ。关于 δ 和 Δ 一块进行误差合成是否合适，以及是否影响误差传递精度，这在实际测量中也是个含糊点。其实，只要一次测量的精度能够达到要求，完全可以使用(6)式进行误差合成。所以，要全面理解灵活运用。(6)式除了计算间接测量的标准误差外，还在误差分析、设计实验方面很有用处。

需要进一步说明的是，(6)式在实际使用中，标准误差使用的是算术平均值的标准误差。所以可将(6)式改写为：

$$\delta_{\bar{N}} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\right)^2 \delta_{\bar{X}_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\right)^2 \delta_{\bar{X}_2}^2 + \cdots\cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial X_m}\right)^2 \delta_{\bar{X}_m}^2}$$

2.2 误差分析

利用(6)式进行误差分析，往往处理来自这两个方面情况：①如计算出的误差值较大时，分析是哪个直接测量起了主导作用，然后可改变这个值的测量方法、测量次数或测量用具；②如在设计实验中，根据对测量要求的总精度，然后再确定各项分误差值的精度，即多次测量中的方法、次数所必需达到的精度，以及一次测量中使用的仪器仪表所必需达到的精度。

如何确定各项分误差值，一般采取等分配方案和可能性的调整原则，即

$$\left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\right)^2 \delta_{\bar{X}_1}^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\right)^2 \delta_{\bar{X}_2}^2 = \cdots\cdots \left(\frac{\partial f}{\partial X_m}\right)^2 \delta_{\bar{X}_m}^2 \leqslant \frac{1}{m} \delta_{\bar{N}}^2$$

式中的 m 为函数中的独立物理量数，误差系数取绝对值。按照等分配方案各直接测量的误差值就被确定了。比如 δ_{X_1} 值是

$$\delta_{X_1} \leqslant \frac{\delta \bar{N}}{\sqrt{m}} \left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\right)^{-1}$$

δ_{X_1} 若是多次测量误差值，就要考虑达到它的精密度所需采取的测量方法和测量次数；若是一次测量就要考虑采取相应准确度（等级）的量具、仪器。在等分配方案中，还会存在这样一个问题，即为了达到预定的测量总精度，有时可能需要高精度仪器、仪表。按照高精密仪器、仪表尽量少用或不用原则，合

理的办法是：将测量值需要高精度的仪器调换成一般精度的仪器，使其精度降低，再将其它测量值的精度适当地提高，并使总的测量精度保持不变。这就是在等分配方案基础上所进行的可能性调整原则。

2.3 测量结果处理方法

在物理量的测量中，对于函数 $N=f(X,Y,Z)$，独立量 X、Y、Z 进行等精度测量取得若干组数据，其结果及误差的处理方法、步骤如下：

（1）求各算术平均值 $\overline{X}$、$\overline{Y}$、$\overline{Z}$。

（2）求各偏差 ν_{xi}、ν_{yi}、ν_{zi}。

（3）求各标准误差 δ_x、δ_y、δ_z。

（4）粗大误差检查及剔除，直至测量列无粗大误差为止。

（5）求各算术平均值的标准误差 $\delta_{\bar{x}}$、$\delta_{\bar{y}}$、$\delta_{\bar{z}}$。

（6）给出直接测量结果的表达式：

$$X=\overline{X}\pm\delta_{\bar{x}},\quad Y=\overline{Y}\pm\delta_{\bar{y}},\quad Z=\overline{Z}\pm\delta_{\bar{z}}$$

（7）求间接测量最佳值，按原函数关系进行运算：$\overline{N}=f(\overline{X},\overline{Y},\overline{Z})$。

（8）求间接测量标准误差 $\delta_{\bar{N}}$，将 $\delta_{\bar{x}}$、$\delta_{\bar{y}}$、$\delta_{\bar{z}}$ 代入标准误差传递公式进行计算。

（9）给出间接测量结果表达式：

$$N=\overline{N}\pm\delta_{\bar{N}}$$

标准误差属误差理论范畴，反映在等精度条件下测量列的偶然误差概率分布情况，其理论体系完整成熟。对于我们不仅只是将其原理、公式拿过来使用而已，而是还要全面地去理解和掌握，就可在实际测量中正确而灵活地运用，以将我们的物理测量工作做的更好。

参 考 文 献

1 林抒，龚镇雄．普通物理实验，北京：人民教育出版社，1981

2 杨述武．普通物理实验，北京：高等教育出版社，1982

3 杨介信，陈国英．普通物理实验，北京：高等教育出版社，1985

4 周秀银．误差理论与实验数据处理，北京：北京航空航天大学出版社，1986

5 刘辉，方林海，单承赣．电子仪器与测量技术．合肥：中国科技大学出版社，1992

Integral Realization and Application on Standard Error

Ning Mindong

(Luoyang Teacher's College　Luoyang　471000)

Abstract

This paper, from the viewpoint of the measurement of physical quantity, synthesizes the standard error in the use of direct & indirect measurement, error analysis and result processing, and gives an explanation and illustration of it. It also makes a comprehensive survey of different textbooks and formulations, and redresses the incorrect expressions of error and confused ideas about the concept, consequently reaches an integral realization and correct usage about standard error.

Key words　standard error, equivalent accuracy, direct measurement, indirect measurement