国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第16卷第4期 1994年12月 Vol. 16 No. 4

天平模型中的二坏元问题*

沙基昌

（国防科技大学系统工程与数学系 长沙 410073）

摘 要 给出了坏元问题的一般定义，引进了有关概念，叙述了搜索方案最优性的五个等级。重点对双试验下的二坏元问题中天平模型作了研究，证明了一系列引理与定理，提出了一个搜索方案，证明了它是依测度最优的。文章最后指出该方案不是一致最优的，并猜测信息论最优的搜索方案是存在的。

关键词 组合数学；计数；坏元问题

分类号 O157.1

如下的问题见诸于智力测验中：27个形状大小完全一样的小球，其中有一个比其它的轻。今有一架天平，请你经过三次称量将该小球找出。

上述问题并不难解，但若条件稍加变化，难度就可能增加不少。例如不知特殊小球是重还是轻。

这类问题有很多变形，从而引申出称为"坏元"问题的一大类问题。例如球的数量，特殊球的个数，所用测试工具与测试方法（不一定是天平）等等。这类问题的基本特征是：

(1) 已知一个集 X，其中含有一个未知子集 D，D 中之元称为坏元，具有某种性质 P.

(2) 存在一种测试性质 P 的方法，测试的对象是 X 的一个或多个子集（在上述天平问题中测试对象即 X 的二个不相交的子集 X_1，X_2).

(3) 每次测试可能有不同的结果（例如天平平衡，左边轻，右边轻三种结果)，出现何种结果取决于坏元集 D 的分布（在上例中，$|D|=1$. 设天平左盘与右盘中的子集分别为 X_1 与 X_2 且 $|X_1|=|X_2|$，则平衡$\Leftrightarrow d\in X-X_1-X_2$，左轻$\Leftrightarrow d\in X_1$，右轻$\Leftrightarrow d\in X_2$，其中 $D=\{d\}$).

(4) 问题的目的在于设计一套测试方案，以尽可能少的试验次数找出 D.

这类坏元问题可以追溯到 Dorfman 的血样群组试验[1]，对信息传输与处理过程中的纠错有潜在的应用价值。近年来数学界对此问题引起了重视[2],[3],[4]。

若 $|D|=1$，则称之为一坏元问题；$|D|=2$ 则称之为二坏元问题；$|D|>2$ 称之为多坏元问题。一坏元问题比较简单，已有圆满的结果。二坏元问题比较复杂，对某些情况

* 1993年5月3日收稿

已获得了相当满意的结果。多坏元问题极其复杂，至今尚未获得很有价值的结果。

按每次测试对象中子集的数量，可分为“单试验”，“双试验”或“多试验”等。D 中之元又有可区分与不可区分之别。本文主要研究双试验下不可区分的二坏元问题，也涉及到一坏元问题。

1 基本定义

对所有坏元问题通用的严格定义至今还没有，但我们将对相当广泛的一类坏元问题给出严格的定义。为此先引进推广了的整数的剖分与集的剖分的概念。

设 k 为正整数，d，d_1，d_2，…，d_k 为非负整数，若 $d_1+d_2+\cdots+d_k=d$，则称（d_1，d_2，…，d_k）为非负整数 d 的 k－（有序）剖分。

设 K 为正整数，S 为集，S_1，S_2，…，S_k 为 S 的两两不相交子集且 $S=S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_k$，则称 $\{S_1, S_2, \cdots, S_k\}$ 为集 S 的 k－无序剖分，称（S_1，S_2，…，S_k）为集 S 的 k－有序剖分。

文献中通常定义非负整数的剖分时要求 $d_i\neq 0$，在定义集的剖分时要求 $S_i\neq\phi$，本文采用的定义根据需要进行了拓广。

设 k，R，d_1，d_2，…，d_k 为正整数。

对每一个 $r\in\{1, \cdots, R\}$，d_r 的所有 $K+1$ 剖分（d_{r1}，d_{r2}，…，$d_{r,K+1}$）之族记为 $\mathscr{P}_r$，设

$$M_r=\{P_{r1},\cdots,P_{rj},\cdots,P_{rJ_r}\}$$

为 $\mathscr{P}_r$ 的一个剖分。记

$$M=M_1\times\cdots\times M_r\times\cdots\times M_R$$

则称 M 为 K-试验下型为（d_1，…，d_K）的坏元问题的一个模型。

设 X 是一个已知集。在模型 M 下对 X 的一次 K-试验（或简称试验）就是 X 的 $K+1$ 有序剖分

$$V=(X_1,X_2,\cdots,X_{K+1})$$

试验的结果就是 M 中的某个元素

$$(P_{1j_1},\cdots,P_{rk_r}\ \cdots,P_{Rj_R})$$

其中 $j_r\in\{1, \cdots, J_r\}$，$r=1, 2, \cdots, R$.

试验树就是一棵有根树，其中每个非叶结点对应于一次试验，由每个非叶结点发出的每条边对应于这次试验的一个结果（由同一个非叶结点发出的不同边对应于不同的试验结果）。

设 V 是试验树 T 中的一个结点，V_1 是 T 的根结点。由 V_1 到 V 的唯一路径设为

$$V_1,e_1,V_2,e_2,\cdots,V_i,e_i,\cdots,V_l,e_l,V$$

其中

$$V_i=(X_1^i,\cdots,X_k^i,\cdots,X_{k+1}^i)$$

为路径上的结点

$$e_i=(P_{1j_1}^{(i)},\cdots,P_{rj_r}^{(i)},\cdots,P_{Rj_R}^{(i)})$$

为相应的边，$i=1, 2, \cdots, I$. 称

$$g_V = \{(G_1,\cdots,G_R): G_1,\cdots,G_R \text{ 是 } X \text{ 中两两不相交的子集，}$$
$$\text{且 } (|G_r\cap X_1^{(i)}|,\cdots,|G_r\cap X_k^{(i)}|,\cdots|G_r\cap X_{K+1}^{(i)}|) \in P_{rj_r}^{(i)}, \quad r=1,2,\cdots,R, i=1,2,\cdots,I\} \tag{1}$$

为结点 V 的反馈集。

一个有效试验树 T 就是所有叶结点的反馈集均由单一成员组成的试验树。此时称 T 中由根到叶结点的路径中最长者 $m(T)$ 为其试验次数。

我们可以对上述定义给出一个形象的解释。设已知集 X 中有子集 $D_1, D_2, \cdots, D_R$，其中 $|D_1|=d_1, \cdots, |D_R|=d_R$，每一个 D_r ($r=1, 2, \cdots, R$) 中的元均不可分，但属于 $D_1, D_2, \cdots, D_R$ 与 X-$(D_1\cup D_2\cup\cdots\cup D_R)$ 中不同集的元均可彼此区分，则

$$|G_r\cap X_k^{(i)}|$$

恰好表示第 i 次试验中第 k 个集内具有的 D_r 中的元数。从而有效试验树 T 恰好表示了对坏元集 $(D_1, \cdots, D_R)$ 的一个完整的搜索方案。

特别地，若 $d_1=d_2=\cdots=d_R=1$，则称其为完全可区分的坏元问题。若 $R=1$，则称其为不可区分的坏元问题。本文将仅讨论不可区分的坏元问题。为叙述简单起见，以下均设 $R=1$，$d_1=d$，并简记 $M=M_1$，$J=J_1$，$\mathscr{P}=\mathscr{P}_1$，$P_j=P_{1j_1}$，$e_i=P_j^{(i)}$，此时 (1) 式也就成为

$$g_V = \{G\subset X: (|G\subset X_1^{(i)}|,\cdots,|G\cap X_k^{(i)}|,\cdots,|G\cap X_{K+1}^{(i)}|)\in e_i,$$
$$i=1,2,\cdots,I\}$$

因 $X_{K+1}=X\setminus(X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_K)$，故为方便起见，一次试验也常用 $(X_1, \cdots, X_K)$ 代替 $(X_1, \cdots X_K, X_{K+1})$.

设 $d=1$，$K=2$，则

$$\mathscr{P} = \{(0,0),(1,0),(0,1)\}$$

取 $P_1=\{(0, 0)\}$，$P_2=\{(1, 0)\}$，$P_3=\{(0, 1)\}$，则

$$M=\{P_1,P_2,P_3\}$$

为一个模型，称之为“天平模型”(天平模型中有时还要求 $|X_1^{(i)}|=|X_2^{(i)}|$)。

记 $X=\{A, B, C, D, E, F, G, H, I\}$，则可构造试验树如图 1 所示其中根结点 $\boxed{ABC, DEF)}$ 表示第一次试验中 $X_1^{(1)}=\{A, B, C\}$，$X_2^{(1)}=\{D, E, F\}$. 由根结点发出的边 P_2 表示试验结果为出现 $\mathscr{P}$ 的剖分 M 中第二个成员 P_2. 结点 $\boxed{\begin{array}{c}ABC\\|\\(A,B)\end{array}}$ 表示其反馈集为 $\{A, B, C\}$，即坏元在 $\{A, B, C\}$ 中，且第二次试验中取 $X_1^{(2)}=\{A\}$，$X_2^{(2)}=\{B\}$，而叶结点“C”表示这是出现结果

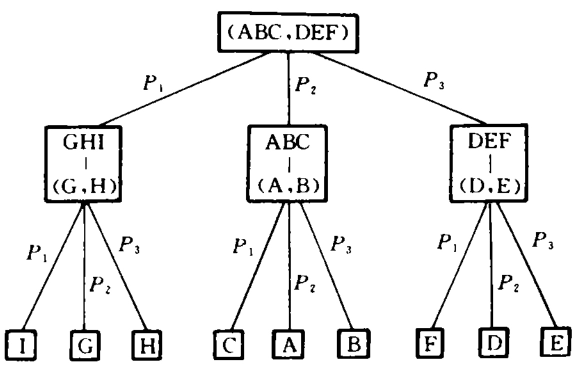


图 1

P_1 时的反馈集，即坏元为 C，其它符号解释类似。此树中 $m(T)=2$.

若将 X 理解为九个球，其中有一个未知的坏元，轻于其它各球，另八个完全一样。每一次试验（用天平称量）就是取出 X 中两个不相交的元素个数相等的子集分别放在天平两端。模型 M 恰好表示天平的三种可能情况：平衡（P_1），左轻（P_2）与右轻（P_3）.

2 最优性

在一定模型下搜索树的构造显然与 $|X|$ 有关，但与 X 中的具体元素无关。

一个搜索方案就是对于 $|X|=1, 2, \cdots, n, \cdots$ 的所有搜索树全体 $\mathscr{T}=(T_1, T_2, \cdots, T_n, \cdots)$.

设 T 为模型 M 下对 X 的搜索树，则用

$$m^M(T) \quad 或 \quad m(T)$$

记 T 的长度。记

$$m_n^M = \min_{T_n} m^M(T_n)$$

其中 T_n 取遍模型 M 下，X（$|X|=n$）的所有搜索树。

如果存在 T_n，使

$$m^M(T_n) = m_n^M$$

则这样的搜索树称为最优的。

因搜索树中每一个非叶结点最多发出 J 条边（不包括指向根结点方向的边），而叶结点的数量恰为 X 中的 d-元子集的个数，即 $\binom{n}{d}$、故从信息论角度，有

$$J^{m_n^M} \geqslant \binom{n}{d}$$

或

$$m_n^M \geqslant \log_J\binom{n}{d} \geqslant d\log_J(n-d) - \log_J(d\,!)$$

因此，当 $n\to\infty$ 时，m_n^M 至少为对数量级。称 $\left\lceil \log^J\binom{n}{d} \right\rceil$ 为信息论下界。有例子说明信息论下界并不是总能达到的。为此，我们可以提出各种不同的最优准则。假定我们找到一种搜索方案 $\mathscr{T}=(T_1, T_2, \cdots, T_n, \cdots)$

(1) 使得对于任意的 $n=1, 2, \cdots$，都有

$$m^M(T_n) = m_n^M$$

则称 $\mathscr{T}$ 是一致最优的；

(2) 如果对任意的 $n\in N\subseteq\{1, 2, \cdots\}$，都有

$$m^M(T_n) = m_n^M$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|N\cap\{1,2,\cdots,n\}|}{n} \geqslant 1$

则称方案 $\mathscr{T}$ 是几乎一致最优的；

(3) 如果 (2) 中的 N 满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|N\cap\{1,2,\cdots,n\}|}{n}\geqslant\delta>0$$

则称 $\mathscr{T}$ 是依测度 δ 最优的；

(4) 如果

$$m^M(T_n)-m_n^M$$

为有界序列，则称 $\mathscr{T}$ 是一阶最优的；

(5) 如果

$$m^M(T_n)/m_n^M$$

为有界序列，则称 $\mathscr{T}$ 为数量级最优的。

可以证明这五个级别的优化水平是逐渐降低的。一般地，由于 m_n^M 很难确定(事实上，若 m_n^M 已知．则通常也已找到最优搜索树)，因此，至少对于前三种优化程度的判断中常用 $\left[\log_J\binom{n}{d}\right]$ 来代替 m_n^M. 这时的结论只会加强而不会减弱。

一般地，获得第五种优化程度的搜索方案是容易的。但获得第三种优化程度的搜索方案就常常是很困难的了。

3 天平模型 S

引理 1 对于一坏元问题的任何模型

$$M=\{P_1,P_2,\cdots,P_J\},(J\geqslant 2)$$

存在搜索方案 $\mathscr{T}=(T_1, T_2, \cdots, T_n, \cdots)$，使得

$$m^M(T_n)=[\log_J n],n=1,2,\cdots,$$

从而达到了信息论下界。故 $\mathscr{T}$ 是最优的。

引理 1 的证明不难。因篇幅关系，从略。

引理 1 中特别地当 $J=3$ 时有 $m^M(I_n)=[\log_3 n]$.

然而二坏元问题要复杂得多。

单试验下的二坏元问题中

$$\mathscr{P}=\{(0,2),(1,1),(2,0)\}$$

$\mathscr{P}$ 的剖分共有五种。

双试验下的二坏元问题中

$$\mathscr{P}=\{(0,0,2),(1,0,1),(0,1,1),(1,1,0),(2,0,0),(0,2,0)\}$$

此时 $\mathscr{P}$ 的剖分共有 203 种!

这些剖分中，有的没有提供任何信息。例如剖分 $M=\{\mathscr{P}\}$，从而不构成实用的模型。还有许多剖分是“等价”的。

设 $\mathscr{P}=\{(d_1,\cdots,d_{K+1}):d_1+\cdots+d_{K+1}=d\}$，

又设 $M=\{P_1,\cdots,P_J\},M'=\{P'_1,\cdots,P'_J\}$

是二个模型，即是 $\mathscr{P}$ 的二个无序剖分。如果存在 $\{1, \cdots, K+1\}$ 上的置换 ϕ 与 $\{1, \cdots, J\}$ 上的置换 ψ，使得当所有的 d_k 换成 $d_{\phi(k)}$时，每一个 P_j 就映成 $P'_{\psi(j)}$，则称模型 M 与 M' 等价。

例如对于双试验下的二坏元问题，若定义

$$M = \{\{(0,0,2),(1,1,0),(1,0,1),(2,0,0)\},\{(0,1,1),(0,2,0)\}\},$$

$$M' = \{\{(0,0,2),(1,1,0),(0,1,1),(0,2,0)\},\{(1,0,1),(2,0,0)\}\}$$

则 M 与 M' 是等价的，只要取

$$\phi(1) = 2,\phi(2) = 1,\phi(3) = 3$$

与

$$\psi(j) = j, j = 1,2$$

即可。

等价模型 M 与 M' 本质上是一样的，因为在模型 M 下对（X_1，X_2，…，X_k，…，X_{K+1}）作试验相当于在模型 M' 下对（$X_{\phi(1)}$，…，$X_{\phi(k)}$，…，$X_{\phi(K+1)}$）所作的试验。因此，可以把等价剖分归作一类，每类中选出一个作为代表来研究即可。在有的文献中，对于使 $\phi(K+1)=K+1$ 的置换对应的二个模型称为对称的，而使 $\phi(K+1)\neq K+1$ 的置换对应的二个模型称为对偶的。

于是单试验下的二坏元问题共有三个不同的模型，而双试验下的二坏元问题共有 51 种不同的模型。对这些模型的完整研究将是很繁琐的。本文余下部分将集中研究“天平模型” S_2，即

$$S_2 = \{\{(0,0,2),(1,1,0)\},\{(1,0,1),(2,0,0)\},\{(0,1,1),(0,2,0)\}\}$$

对于多试验下的二坏元问题或多坏元问题情况就更为复杂，且由于实际下界与信息论下界间的距离而导致搜索方案的最优性极难判断。

下文中为书写方便起见，用（X_1，X_2）来代替剖分（X_1，X_2，X_3），从而相应地模型 S_2 也简写为

$$S_2 = \{\{(0,0),(1,1)\},\{(1,0),(2,0)\},\{(0,1),(0,2)\}\}$$

4 模型 S_2 下的一个搜索方案 $\mathscr{T}$

定理 1 在模型 S_2 下存在搜索方案 $\mathscr{T}=(T_1, T_2, \cdots, T_n, \cdots)$ 使得 $m^{S_2}(T_3)=1$，$m^{S_2}(T_4)=2$，$m^{S_2}(T_7)=3$，$m^{S_2}(T_{20})=5$.

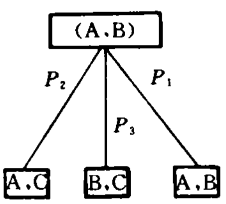


图 2

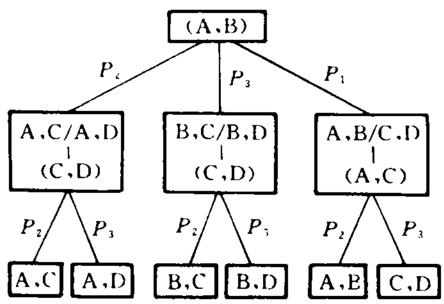


图 3

证 对于集 X，$|X|=3$，4，7，20 相应的试验树分别如下。

(1) $X=\{A, B, C\}$，见图 2.

其中 P_2 表示 $P_2=\{(1, 0), (2, 0)\}$，P_3 表示 $P_3=\{(0, 1), (0, 2)\}$，而 P_1 表示 $P_1=\{(0, 0), (1, 1)\}$，下同。

(2) $X=\{A, B, C, D\}$ 见图 3.

其中 A，C/A，D 表示该结点的反馈集为 $\{\{A, C\}, \{A, D\}\}$，其余类似。

(3) $X=\{A,B,C,D,E,F,G\}$，见图 4.

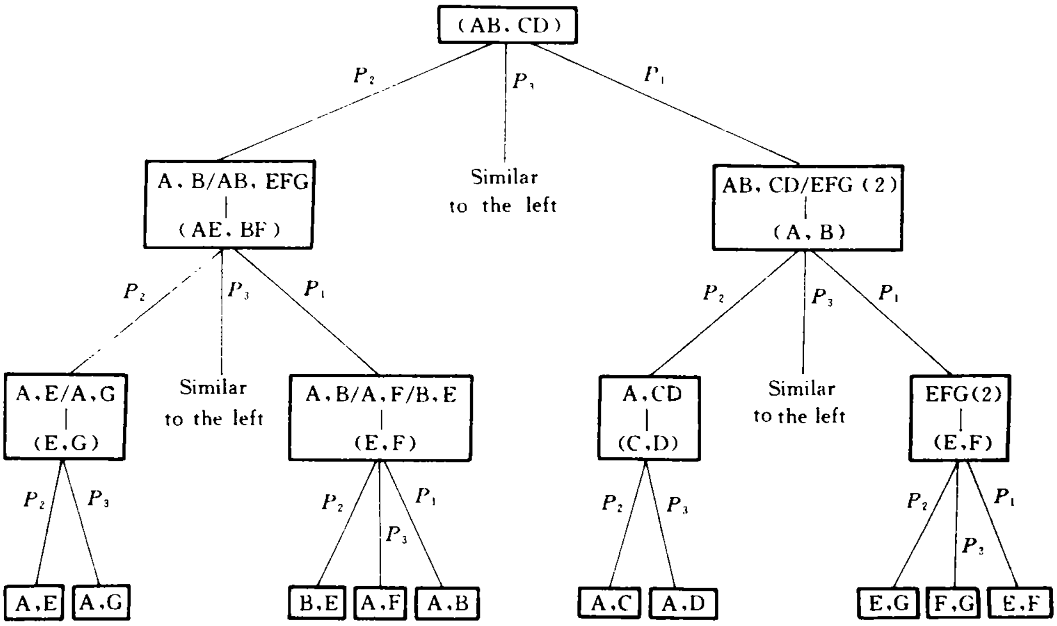


图 4

其中 AB，CD/EFG (2) 表示反馈集中的坏元对，一个在 $\{A, B\}$ 中，另一个在 $\{C, D\}$ 中或者二个都在 $\{E, F, G\}$ 中，其余类似。

(4) 记

$$S_1=\{A,B,C,D,E,F,G\}$$

$$S_2=\{a,b,c,d,e,f,g\}$$

$$S_3=\{1,2,3,4,5,6\}$$

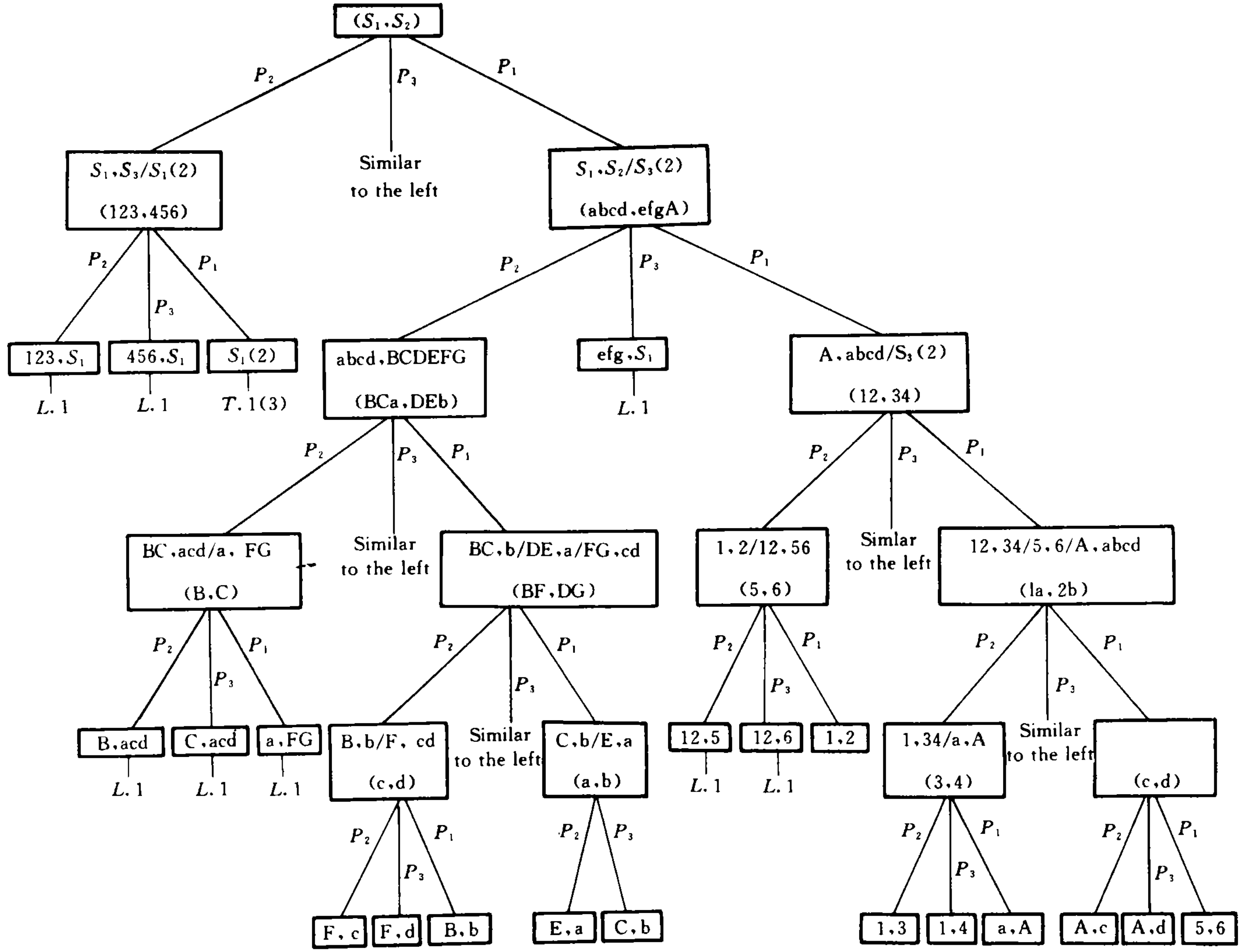
$$S=S_1\cup S_2\cup S_3$$

则 $|S|=20$，T_{20}部分试验树如图 5.

引理 2 设 $|S|=|T|=3^I(I\geqslant 1)$，$S\cap T=\phi$，且 S、T 中各有一个坏元，则用 $2I$ 次试验可将二个坏元找出。

证 由引理 1 知，用 I 次试验可从 S 中找出一个坏元，再用 I 次试验可从 T 中找出一个坏元。

引理 3 设 $|S|=4\cdot 3^I$，$|T|=2\cdot 3^I$，$S\cap T=\phi$，且 S、T 中各有一个坏元，则用 $2I+2$ 次试验可将二个坏元找出。



(S1,S2)
P2
P3
P1
Similar to the left
S1,S3/S1(2) (123,456)
S1,S2/S3(2) (abcd,efgA)
123,S1
456,S1
S1(2)
L.1
T.1(3)
abcd,BCDEFG (BCa,DEb)
efg,S1
A,abcd/S3(2) (12,34)
BC,acd/a, FG (B,C)
BC,b/DE,a/FG,cd (BF,DG)
1,2/12,56 (5,6)
Simlar to the left
12,34/5,6/A,abcd (la,2b)
B,acd
C,acd
a,FG
B,b/F, cd (c,d)
C,b/E,a (a,b)
12,5
12,6
1,2
1,34/a,A (3,4)
(c,d)
F,c
F,d
B,b
E,a
C,b
1,3
1,4
a,A
A,c
A,d
5,6

图 5

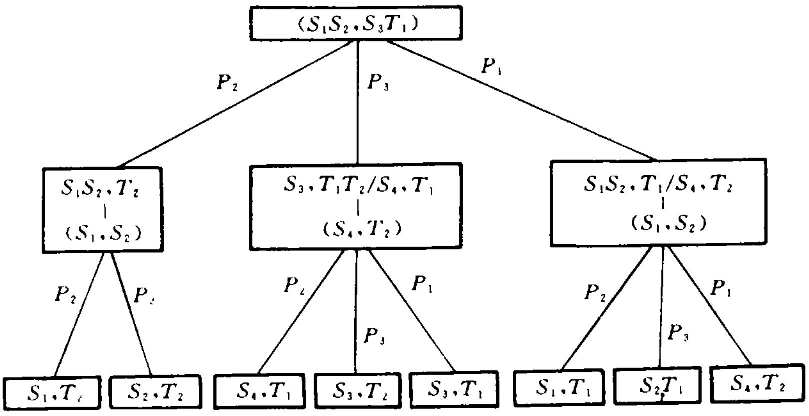


图 6

证 设 $S=S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4$，$T=T_1\cup T_2$，且

$$|S_1| = |S_2| = |S_3| = |S_4| = |T_1| = |T_2| = 3^I$$

则头二次试验的部分试验树如图 6. 以上每一节点按引理 2 均可通过 $2I$ 次试验而将二个坏元找到。因此总共有 $2I+2$ 次试验足够。

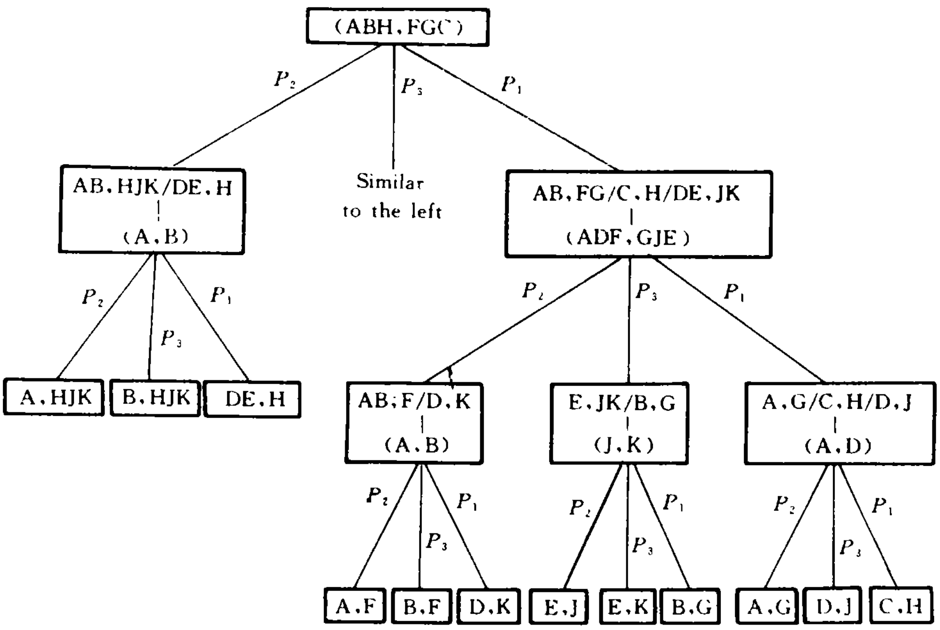


图 7

引理 4 设 $|S|=|T|=5\cdot 3^I$，$S\cap T=\phi$，且 S、T 中各含一个坏元，则用 $2I+3$ 次试验可将二个坏元找出。

证 设 $S=A\cup B\cup C\cup D\cup E, T=F\cup G\cup H\cup J\cup K$
且 $|A|=|B|=|C|=|D|=|E|=|F|=|G|=|H|=|J|=|K|=3^I$.
则前二至三次试验的部分试验树如图 7.
试验树的余下部分显然可经过 $2I$ 次或 $2I+1$ 次试验完成。

引理 5 设$|S|=20\cdot 3^I$，$|T|=10\cdot 3^I$，$S\cap T=\phi$，且 S、T 中各含一个坏元，则用 $2I+5$ 次试验可将二个坏元找出。

证 仿引理 3 的证明中构造前二次试验的部分试验树，则相应最下层结点中每个集的元素个数均为 $5\cdot 3^I$，于是由引理 4，即知余下部分再用 $2I+3$ 次试验即可将坏元找出。

定理 2 存在模型 S_2 下的一个搜索方案 $\mathscr{T}=(T_1, T_2, \cdots, T_n, \cdots)$ 使得

$$m^{S_2}(T_3)=1, m^{S_2}(T_7)=3,$$
$$m^{S_2}(T_{4\cdot 3^I})=2I+2, I\geqslant 0,$$
$$m^{S_2}(T_{20\cdot 3^I})=2I+5, I\geqslant 0.$$

证 对于 T_3, T_4, T_7, T_{20}已由定理 1 证明。对于 $I\geqslant 1$ 时的 $T_{4\cdot 3^I}$以及 $T_{20\cdot 3^I}$可用归纳法证明如下。

设$|S|=4\cdot 3^I$(或 $20\cdot 3^I$)，$I\geqslant 1$，又设 $S=S_1\cup S_2\cup S_3$，$|S_1|=|S_2|=|S_3|=\frac{1}{3}|S|$，令

$$S_1=R_1\cup R_2, S_3=R_3\cup R_4, |R_1|=|R_2|=|R_3|=|R_4|=\frac{1}{6}|S|$$

则 $T_{4\cdot 3^I}$(或 $T_{20\cdot 3^I}$)的前二次试验的部分试验树如图 8.
而试验树中余下的部分总可用 $2I$(或 $2I+1$)次试验完成，这点可由引理 3(或引理 5)及归纳法假设得知。

容易证明，对于 $4\cdot 3^{I+1}<n\leqslant 20\cdot 3^I, I=0,1,2,\cdots$，可使 $m^{S_2}(T_n)=m^{S_2}(T_{20}\cdot 3^I)=2I+5$，对于 $20\cdot 3^I<n\leqslant 4\cdot 3^{I+2}, I=0,1,2$，可使 $m^{S_2}(T_n)=m^{S_2}(T_{4\cdot 3^{I+2}})=2I+6$.

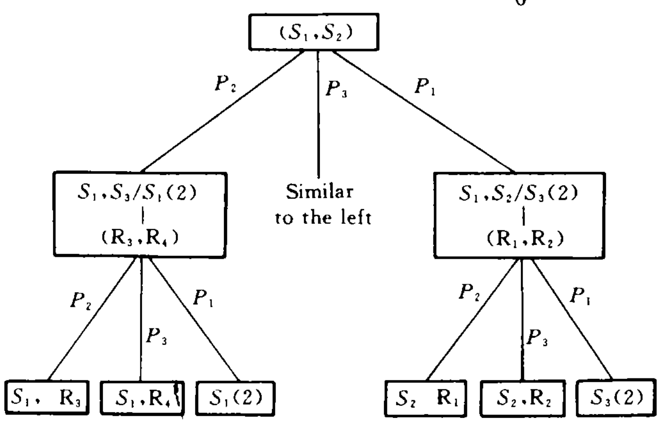


图 8

5 最优性

定理 3 按定理 2 及其后说明构造的搜索方案 $\mathscr{T}$ 是依测度最优的。

证 记 $a_i=\lceil\sqrt{2}\cdot 3^{i+2}\rceil$，$b_i=\lceil\sqrt{6}\cdot 3^{i+2}\rceil$，$i=0, 1, 2, \cdots$，则

$$a_i<20\cdot 3^i<b_i<4\cdot 3^{i+2}<a_{i+1}, i=0,1,2,\cdots,$$

不难证明，当 $a_i<n\leqslant 20\cdot 3^i$ 时

$$\binom{n}{2}=\frac{1}{2}n(n-1)>\frac{1}{2}a_i^2\geqslant 3^{2i+4}$$

于是

$$2i+4<\left\lceil \log_3\binom{n}{2}\right\rceil \leqslant m_n^{S_2}\leqslant m^{S_2}(T_n)=2i+5$$

从而 $m^{S_2}(T_n)=m_n^{S_2}$，即 T_n 是最优的。

同理可证，当 $b_i<n\leqslant 4\cdot 3^{i+2}$ 时 T_n 也是最优的。

令

$$N=\bigcup_{i=0}^{\infty}\{(a^i,20.3^i]\cup(b_i,4\cdot 3^{i+2}]\}$$

则当 $n\in N$ 时，T_n 是最优的，且易证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|N\cup[1,2,\cdots,n]|}{n}$$

$$\geqslant \min\left(\frac{20\cdot 3^i-a_i+4\cdot 3^{i+2}-b_i}{a_{i+1}-a_i},\frac{4\cdot 3^{i+2}b_i+20\cdot 3^{i+1}-a_{i+1}}{b_{i+1}-b_i}\right)=0.811$$

于是搜索方案 $\mathscr{T}$ 是依测度 0.811 最优的。

定理 3 中的搜索方案 $\mathscr{T}$ 不是一致最优的。事实上可证明 $m_{13}^{S_2}=4$，$m_{22}^{S_2}=5$，即对这二种情况，$n=13$ 与 $n=22$，信息论下界都是可以达到的。限于篇幅，不在此详细列出搜索树。于是就提出这样一个问题：对于模型 S_2，信息论下界是否总是可以达到的?

参 考 文 献

1 R Dorfman. The Detection on Defective Members in Large Population. Ann. Math. Statist, 1943, 14: 436～440

2 R Bellman, Glass. On Various Versions of the Detective Coin Problem, Information and Control, 1961, 4: 118～151

3 G Cheng, F Hwang, S Lin. Group Testing with Two Defectives. Discrete Appl. Math. 1982, 4: 97～102

4 F K Hwang. A Tale of Two Coins. Amer. Math. Mon. 1987. 94 (2): 121～129

The Scale Model with Two Defectives

Sha Jichang

(Department of System Engineering and Mathematics, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract

The definition of detection on defectives is given, which is suitable for both distinctive defectives and nondistinctive defectives.

This paper is focalized on the scale model with two defectives under a bi-test device. A search schedule is presented and proved that it is optimal by measure. At the end of this paper it is pointed out that the search schedule mentioned above is not uniformly optimal and a guess is made that an informational optimal search schedule maybe exists.

Key words combinatorics; enumeration; defective problems