

保形插值的样条函数方法*

方 逵

傅凯新

(国防科技大学)

(湘潭大学)

摘 要 对于给定的任何型值数组, 本文通过插入新结点构造了 C^1 连续的保形插值二次和三次样条函数 $S(x)$, 最后还讨论了单调保形的插值样条函数。

关键词 插值样条函数; 保单调性; 保凸性; 保形性

分类号 O241.3

保形插值已广泛地应用于函数逼近论, 数值计算, 数据处理, 计算机辅助几何设计, 计算机图形学中。样条函数由于连续性好, 次数低且计算简单、稳定, 因而受到重视, 自然样条函数的保形插值就显得更加重要。样条函数的保形插值已有很多研究工作^[1~5], 比较好的结果有保形插值二次和三次样条函数存在的充要条件^[4~5]。遗憾的是这些充要条件对型值点的要求十分苛刻, 一般的型值点组很难满足这些条件, 因而就得不到保形插值二次和三次样条函数, 本文通过插入部分结点, 用几何的方法构造了分段二次和三次保形插值样条函数, 最后, 我们还讨论了单调保形插值。

1 预备知识

定义 1 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有定义, 称 n 次多项式

$$B_n(f, x) = \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{i=0}^n f(a+ih) C_n^i (x-a)^i (b-x)^{n-i}, \quad (1)$$

为函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的 n 次 Bernstein 多项式, 式中 $h = \frac{b-a}{n}$, $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ 。

下面不加证明给出 $B_n(f, x)$ 的基本性质^[6]。

(1) 端点插值

$$B_n(f, a) = f(a), \quad B_n(f, b) = f(b)$$

(2) 端点导数公式

$$\begin{cases} B_n^{(k)}(f, a) = \frac{n!}{(b-a)^n (n-k)!} \Delta_h^k f(a), \\ B_n^{(k)}(f, b) = \frac{n!}{(b-a)^n (n-k)!} \Delta_h^k f[a + (n-k)h]; \end{cases} \quad k \geq 0, \quad (2)$$

* 1993年4月20日收稿

- (3) 直线段保持性;
- (4) 保单调性;
- (5) 保凸性。

对于区间 $[a, b]$ 上的一个分划

$$\Delta: \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

在每个结点 x_i 处给定相应的型值 y_i , 令

$$\begin{cases} D_i = (y_i - y_{i-1}) / (x_i - x_{i-1}) & (i = 1, 2, \cdots, n), \\ S_i = (D_{i+1} - D_i) / (x_{i+1} - x_{i-1}) & (i = 1, 2, \cdots, n-1), \end{cases} \quad (3)$$

定义 2 设有型值 y_i ($i=0, 1, \cdots, n$), 如果函数 $S(x)$ 满足条件

$$S(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \cdots, n),$$

且 $S(x)$ 在 $[a, b]$ 内的拐点个数不多于 δ_i ($i=1, 2, \cdots, n-1$) 的变号数, 则称 $S(x)$ 是型值 $\{y_i\}_{i=0}^n$ 的保形插值函数。如果 $\{y_i\}_{i=0}^n$ 还是单调的, 而 $S(x)$ 也是单调的, 则 $S(x)$ 是型值 $\{y_i\}_{i=0}^n$ 的单调保形插值函数。

设 $[a, b]$ 上待构造的保形插值函数为 $S(x)$, 则 $S(x)$ 在各结点 x_i 处导数 m_i 可选取为

$$m_i = t_i D_i + (1 - t_i) D_{i+1}, \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1), \quad (4)$$

式中 t_i 是导数 m_i 的调节参数, 且 $0 \leq t_i \leq 1$ 。

对于边界斜率, 按文 [4] 的方法选取以保证

$$\delta_0 = \frac{D_1 - m_0}{x_1 - x_0}, \quad \delta_n = \frac{m_n - D_n}{x_n - x_{n-1}} \quad (5)$$

满足 $\delta_0 \cdot \delta_1 > 0, \delta_{n-1} \cdot \delta_n > 0$ 。从而可以使首尾两段曲线上不会出现拐点, 因为我们构造保形插值函数 $S(x)$ 的原则是: 若 $\delta_{i-1} \cdot \delta_i > 0$, 则 $S(x)$ 在子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上无拐点; 若 $\delta_{i-1} \cdot \delta_i < 0$, $S(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上有唯一的拐点; 而 $\delta_{i-1} \cdot \delta_i = 0$, 则 $S(x)$ 在某些区间上作保直处理。

2 C^1 连续的保形插值二次样条函数 $S(x)$

本节我们分无拐点和有拐点子区间构造 $S(x)$

2.1 无拐点子区间上的 $S(x)$

若 $\delta_{i-1} \cdot \delta_i > 0$, 则 $S(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上无拐点, 设过 (x_{i-1}, y_{i-1}) 和 (x_i, y_i) 分别以 m_{i-1} 和 m_i 为斜率的直线是 l_{i-1} 和 l_i , 容易求得它们的交点坐标为

$$\begin{cases} x_m = (m_i x_i - m_{i-1} x_{i-1} - y_i + y_{i-1}) / (m_i - m_{i-1}), \\ y_m = y_{i-1} + m_{i-1} (x_m - x_{i-1}), \end{cases} \quad (6)$$

由于 δ_{i-1} 与 δ_i 同号, 易证 $x_m \in (x_{i-1}, x_i)$ 。

当 $x_m = (x_{i-1} + x_i) / 2 = x_{i-1} + \frac{1}{2} h_i$ 时, 记 $[x_{i-1}, x_i]$ 上由 l_{i-1} 和 l_i 组成的折线函数为 $L(x)$, 则

$$L(x) = \begin{cases} y_{i-1} + m_{i-1} (x - x_{i-1}), & x_{i-1} \leq x < x_m, \\ y_i + m_i (x - x_i), & x_m \leq x \leq x_i, \end{cases} \quad (7)$$

式中 (x_m, y_m) 称为折线函数 $L(x)$ 的角点坐标。

因为 $L(x)$ 是凸函数, 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上作 $L(x)$ 的二次 Bernstein 多项式, 于是得到 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的插值函数

$$S(x) = \sum_{j=0}^2 B_{j,2}(t) L(x_{i-1} + j \cdot \frac{h_i}{2}), \quad t = \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, \quad h_i = x_i - x_{i-1},$$

式中 $B_{j,2}(t) = C_2^j t^j (1-t)^{2-j}, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (8)$

由 Bernstein 多项式的性质(1)和(2)易证

$$\begin{cases} S(x_{i-1}) = y_{i-1}, & S(x_i) = y_i; \\ S'(x_{i-1}) = m_{i-1}, & S'(x_i) = m_i. \end{cases} \quad (9)$$

由 Bernstein 多项式的保凸性知 $S(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上是凸函数。

当 $x_m \neq x_{i-1} + \frac{1}{2}h_i$ 时, 在区间 $[x_{i-1}, x_m]$ 和 $[x_m, x_i]$ 上分别用上面的方法构造二次 Bernstein 多项式, 使它们有相同的凸性。令

$$\begin{cases} x_{i-1}^+ = \frac{x_{i-1} + x_m}{2}, & y_{i-1}^+ = \frac{y_{i-1} + y_m}{2} \\ x_i^- = \frac{x_m + x_i}{2}, & y_i^- = \frac{y_m + y_i}{2} \end{cases} \quad (10)$$

过点 (x_{i-1}^+, y_{i-1}^+) 和 (x_i^-, y_i^-) 作直线 \bar{l}_i , 易求得:

$$\bar{l}_i: \quad \bar{l}_i(x) = y_{i-1}^+ + D_i(x - x_{i-1}^+),$$

记区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上由 l_{i-1}, \bar{l}_i, l_i 组成的折线函数为 $\bar{L}(x)$, 则有

$$\bar{L}(x) = \begin{cases} l_{i-1}(x), & x_{i-1} \leq x \leq x_{i-1}^+, \\ \bar{l}_i(x), & x_{i-1}^+ \leq x \leq x_i^-, \\ l_i(x), & x_i^- \leq x \leq x_i, \end{cases} \quad (11)$$

在 $[x_{i-1}, x_m]$ 和 $[x_m, x_i]$ 上分别作 $\bar{L}(x)$ 的二次 Bernstein 多项式, 得到区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的插值函数

$$S(x) = \begin{cases} \sum_{j=0}^2 B_{j,2}(t) \bar{L}(x_{i-1} + j \frac{x_m - x_{i-1}}{2}), & t = \frac{x - x_{i-1}}{x_m - x_{i-1}}, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_m, \\ \sum_{j=0}^2 B_{j,2}(t) \bar{L}(x_m + j \frac{x_i - x_m}{2}), & t = \frac{x - x_m}{x_i - x_m}, \quad x_m \leq x \leq x_i \end{cases} \quad (12)$$

2.2 有拐点子区间上的 $S(x)$

当 $\delta_{i-1}\delta_i < 0$ 时, $S(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上有唯一的拐点, 过点 (x_{i-1}, y_{i-1}) 和 (x_i, y_i) 以 m_{i-1} 和 m_i 为斜率分别作直线 l_{i-1} 和 l_i (如图 1), 从图知 l_{i-1} 和 l_i 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上无交点。在图 1 中, 记

$$x_{i-1}^+ = x_{i-1} + \frac{1}{4}h_i, \quad y_{i-1}^+ = l_{i-1}(x_{i-1}^+),$$

$$x_i^- = x_i - \frac{1}{4}h_i, \quad y_i^- = l_i(x_i^-)$$

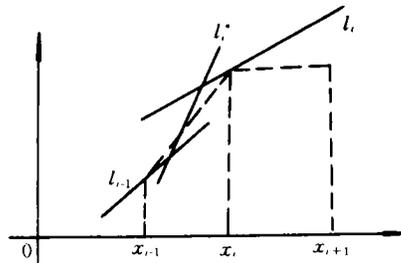


图 1 粗线条表示 $L^*(x)$

过两点 (x_{i-1}^+, y_{i-1}^+) 和 (x_i^-, y_i^-) 作直线 l_i^* ,

$$l_i^*: l_i^*(x) = y_{i-1}^+ + \frac{1}{2}(4D_i - m_i - m_{i-1})(x - x_{i-1}^+),$$

$[x_{i-1}, x_i]$ 上由 l_{i-1}, l_i^*, l_i 组成的折线函数记为 $L^*(x)$, 则

$$L^*(x) = \begin{cases} y_{i-1} + m_{i-1}(x - x_{i-1}), & x_{i-1} \leq x < x_{i-1}^+, \\ l_i^*(x), & x_{i-1}^+ \leq x < x_i^-, \\ y_i + m_i(x - x_i), & x_i^- \leq x \leq x_i, \end{cases} \quad (13)$$

在 $[x_{i-1}, x_{i-1} + \frac{1}{2}h_i]$ 和 $[x_i - \frac{1}{2}h_i, x_i]$ 上分别作 $L^*(x)$ 的二次 Bernstein 多项式, 得到 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的插值函数

$$S(x) = \begin{cases} \sum_{j=0}^2 B_{j,2}(t) L^*(x_{i-1} + j \cdot \frac{h_i}{4}), & t = \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, \quad x_{i-1} \leq x < x_{i-1} + \frac{1}{2}h_i, \\ \sum_{j=0}^2 B_{j,2}(t) L^*(x_{i-1} + \frac{1}{2}h_i + j \cdot \frac{h_i}{4}), & t = \frac{2x - x_{i-1} - x_i}{h_i}, \quad x_{i-1} + \frac{1}{2}h_i \leq x < x_i \end{cases} \quad (14)$$

当 $\delta_{i-1}\delta_i=0$ 时, 不妨假设 $\delta_i=0$, 则三点 $(x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i)$ 和 (x_{i+1}, y_{i+1}) 共线, 这时取 $t_{i-1}=0, t_{i+1}=1$, 从而有 $m_{i-1}=m_{i+1}=D_i$, 于是在区间 $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ 上作直线段处理 (如图 2), 而其它区间上的插值函数仍然按前面的方法处理构造。

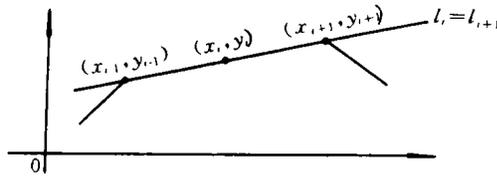


图 2

3 C¹ 连续的保形插值三次样条函数 S(x)

保形插值三次样条函数的构造思想和过程与保形二次的构造完全类似, 下面只是简单地给出构造过程。在构造插值函数之前, 我们先介绍一个定理^[4]。

定理 (7) 式定义的折线函数 $L(x)$ 在区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的三次 Bernstein 多项式 $B_3(L, x)$ 满足条件

$$\begin{aligned} B_3(L, x_{i-1}) &= y_{i-1}, & B_3'(L, x_{i-1}) &= m_{i-1}, \\ B_3(L, x_i) &= y_i, & B_3'(L, x_i) &= m_i \end{aligned}$$

的充分必要条件是 $L(x)$ 的角点横坐标 x_m 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 的中间三分之一区间内, 即 $x_{i-1} + \frac{1}{3}h_i \leq x_m \leq x_i - \frac{1}{3}h_i$ 。

下面构造插值函数 $S(x)$:

3.1 无拐点子区间上的 $S(x)$

设 $\delta_{i-1} \cdot \delta_i > 0$, 则 $S(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上无拐点。

当 $x_m \in [x_{i-1} + \frac{1}{3}h_i, x_i - \frac{1}{3}h_i]$, 则在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上作 $L(x)$ 的三次 Bernstein 多项式, 得到插值函数

$$S(x) = \sum_{j=0}^3 B_{j,3}(t) L(x_{i-1} + j \cdot \frac{h_i}{3}), \quad t = \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, \quad x_{i-1} \leq x < x_i$$

$$\text{式中} \quad B_{j,3}(t) = C_3^j t^j (1-t)^{3-j}, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (15)$$

当 $x_m \in [x_{i-1} + \frac{1}{3}h_i, x_i - \frac{1}{3}h_i]$, 则令

$$\begin{cases} x_{i-1}^+ = x_{i-1} + \alpha(x_m - x_{i-1}), & y_{i-1}^+ = l_{i-1}(x_{i-1}^+), \\ x_i^- = x_i - \beta(x_i - x_m), & y_i^- = l_i(x_i^-), \end{cases} \quad (16)$$

式中 $\frac{1}{3} < \alpha, \beta < \frac{2}{3}$.

过点 (x_{i-1}^+, y_{i-1}^+) 和 (x_i^-, y_i^-) 作直线 \bar{l}_i , 它的函数为 $\bar{l}_i(x)$. 区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上由 l_{i-1}, \bar{l}_i, l_i 组成的折线函数仍记为 $\bar{L}(x)$, 那么在 $[x_{i-1}, x_m]$ 和 $[x_m, x_i]$ 上分别作 $\bar{L}(x)$ 的三次 Bernstein 多项式, 则可得到无拐点子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的插值函数 $S(x)$.

3.2 有拐点子区间上的 $S(x)$

当 $\delta_{i-1} \cdot \delta_i < 0$, 则 $S(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上有一拐点, 记

$$\begin{cases} x_{i-1}^+ = x_i + \alpha \frac{h_i}{2}, & y_{i-1}^+ = l_{i-1}(x_{i-1}^+), \\ x_i^- = x_i - \beta \frac{h_i}{2}, & y_i^- = l_i(x_i^-) \end{cases} \quad (17)$$

式中 $\frac{1}{3} < \alpha, \beta < \frac{2}{3}$.

设连接 (x_{i-1}^+, y_{i-1}^+) 和 (x_i^-, y_i^-) 的直线为 l_i^* , 它的函数为 $l_i^*(x)$, 而 $[x_{i-1}, x_i]$ 上由 l_{i-1}, l_i^*, l_i 组成的折线函数为 $L^*(x)$, 于是在 $[x_{i-1}, x_{i-1} + \frac{1}{2}h_i]$ 和 $[x_{i-1} + \frac{1}{2}h_i, x_i]$ 上分别作 $L^*(x)$ 的三次 Bernstein 多项式, 则可得到有拐点子区间上的插值函数 $S(x)$.

从上可知, C^1 连续的保形插值三次样条函数灵活性较大, 所插入的结点较少, 因此比较适合于几何外形曲线的计算机辅助设计.

4 单调保形插值二次和三次样条函数

如果型值 $y_i (i=0, 1, \dots, n)$ 是单调的, 那么要求的保形样条函数 $S(x)$ 也是单调的, 我们称这种既保单调又保形的插值样条函数为单调保形的插值样条函数. 下面我们将看到, 前面介绍的保形插值函数也可以是单调保形的插值函数.

由于 Bernstein 多项式具有单调性, 构造单调保形插值关键是使折线函数 $L(x), \bar{L}(x), L^*(x)$ 成为单调函数, 下面不妨假设型值 $y_i (i=0, 1, \dots, n)$ 是单调增的. 即

$$y_{i-1} \leq y_i (i=1, 2, \dots, n)$$

或写成

$$D_i \geq 0 (i=1, 2, \dots, n) \quad (18)$$

4.1 无拐点子区间上的单调保形插值样条函数

当 $\delta_{i-1} \cdot \delta_i > 0$ 时, $S(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上无拐点, 由式 (4) 和 (18) 可知 $m_i \geq 0 (i=0, 1, \dots, n)$, 因此有

$$L'(x) = \begin{cases} m_{i-1} \geq 0, & x_{i-1} \leq x < x_m, \\ m_i \geq 0, & x_m \leq x \leq x_i, \end{cases}$$

故 $L(x)$ 是单调增函数。同理可证 $\bar{L}(x)$ 也是单调增函数。

4.2 有拐点子区间上的单调保形插值样条函数

设 $\delta_{i-1} \cdot \delta_i < 0$, 则 $S(x)$ 在区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上有一拐点, $\bar{x}_i = x_{i-1} + \frac{1}{2}h_i$, $\bar{y}_i = \frac{1}{2}(y_{i-1} + y_i)$ 过点 (\bar{x}_i, \bar{y}_i) 处作直线 l_i^* , 且

$$l_i^*: l_i^*(x) = \bar{y}_i + D_i \lambda_i (x - \bar{x}_i),$$

式中 λ_i 是权因子, 选取适当的 λ_i 使得 l_i^* 与 l_{i-1} 和 l_i 两直线的交点 x_{m_1} 和 x_{m_2} 落在区间 $[x_{i-1}, \bar{x}_i]$ 和 $[\bar{x}_i, x_i]$ 的内部, 图 3 是 $\lambda_i = 0.8$ 的情形。

在区间 $[x_{i-1}, \bar{x}_i]$ 和 $[\bar{x}_i, x_i]$ 上分别按无拐子区间上的方法构造保形插值样条函数, 可以证明 \bar{x}_i 是 $S(x)$ 在有拐子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的唯一拐点。

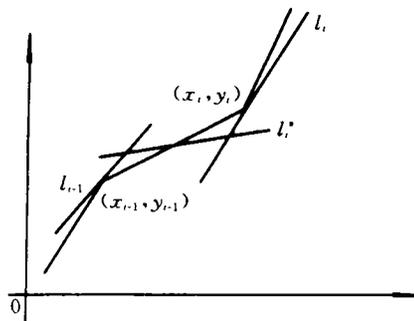


图 3

参 考 文 献

- 1 Gregory. J A and Delbourgo R. IMA J of Numerical Analysis. 1982, 123~130
- 2 Randall L, Edelman A. Hyman J M. Computational Mathematics. 1989; 52 (186)
- 3 方遼等. 单调光滑函数的保形插值算法. 国防科技大学学报. 1992. (2); 60~65
- 4 方遼等. 数值计算与计算机应用. 1994, 15 (3); 67~74
- 5 黄友谦. 曲线曲面的数值表示与逼近. 上海: 上海科技出版社. 1986
- 6 方遼等. 计算机辅助几何设计. 河北: 河北教育出版社, 1993

Spline Function Method for Shape Preserving Interpolation

Fang Kui Fu Kaixing

(Department of Systems Engineering and Mathematics, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract

For any given sequence of data points, in this paper, a C^1 shape preserving interpolating quadratic and cubic spline function $S(x)$ by inserting some new knots are constructed by using Bernstein polynomials. The $S(x)$ is simple and efficient to calculate. Finally the monotonic shape preserving spline function is also discussed.

Key words interpolating spline function; monotonicity preserving property; convexity preserving property; shape preserving property