

等距曲线的保凸插值*

朱炬波

(国防科技大学系统工程与数学系 长沙 410073)

摘要 利用均匀三次 B 样条去逼近平面曲线的等距曲线, 给出了一种保凸的逼近。

关键词 等距曲线; B 样条曲线; 保凸插值

分类号 O241.5

等距(外推)曲线在工业上有很多应用, 例如在纺织业中的数控缝纫机, 制鞋业及汽车外形设计。已有一些作者讨论过外推曲线的生成和逼近问题。Klass^[1]利用曲线段端点的外推点及端点的切线作出了一条三次样条曲线, 这种方法的主要缺点是中间段的误差可能太大, 且在交互式外形设计中并不实用。Pham^[2]利用均匀 B 样条去逼近等距线, 但它需要反算控制顶点, 会出现求解不稳定。Hanson^[3]直接用生成曲线的控制多边形的外推作为逼近外推曲线的控制多边形。Coquillart^[4]则改进了 Hanson 的方法, 用的同样是 NURBS 曲线, 但他的控制多边形是沿径向方向作出的。本文给出另一种均匀三次 B 样条方法去逼近外推线, 主要从保形性方面考虑, 得到的曲线是保凸的, 而保凸问题在外推曲线方面还没有见到讨论。

1 外推曲线和均匀 B 样条

原曲线是

$$C(t) = \{x(t), y(t)\} \quad 0 \leq t \leq 1$$

则它的距离为 r 的外推线是

$$C_r(t) = C(t) + rN(t) \quad (1)$$

这里 $N(t)$ 是 $C(t)$ 的单位法向量, $N(t) = \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}(-y', x')$, 那么 $G_r(t)$ 的参数方程是

$$x_r(t) = x(t) \mp r \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \quad (2)$$

$$y_r(t) = y(t) \pm r \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \quad (3)$$

正号或负号取决于曲线 $C_r(t)$ 在 $C(t)$ 的左边还是右边, 如图(1)

* 1994年3月21日收稿

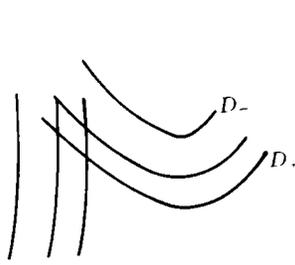


图 1

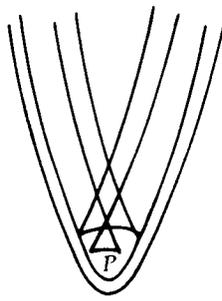


图 2

引理 1 平面上一段凸的光滑曲线 $C(t)$, 当 $r \leq \min \{ \frac{1}{k} \}$ 时, k 为 $C(t)$ 在 t 处的曲率, 其外推曲线 $C_r(t) = C(t) + rN(t)$ 也是凸的。

证明见文 [5]。这个结果是显然的。如图 (2), 这是一条抛物线及其外推线, P 是一个临界点。在实际应用中, 大部分情况都满足引理条件, 只在艺术品设计中可能不满足, 这时也不需要保形要求了^[11]。

给定 $n+1$ 个控制顶点 V_0, V_1, \dots, V_n , 它的均匀三次 B 样条曲线的第 i 段为

$$C_i(t) = E_{0,3}(t)V_{i-1} + E_{1,3}(t)V_i + E_{2,3}(t)V_{i+1} + E_{3,3}(t)V_{i+2} \quad 0 \leq t \leq 1$$

其中 $E_{i,3}(t)$ ($i=0, 1, 2, 3$) 为基函数, 共有 $n-2$ 段

$$E_{0,3}(t) = \frac{1}{3!}(-t^3 + 3t^2 - 3t + 1)$$

$$E_{1,3}(t) = \frac{1}{3!}(3t^3 - 6t^2 + 4)$$

$$E_{2,3}(t) = \frac{1}{3!}(-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1)$$

$$E_{3,3}(t) = \frac{1}{3!}t^3$$

由上式易求得均匀三次 B 样条曲线段具有如下的端点性质

$$C_i(0) = \frac{1}{6}(V_{i-1} + 4V_i + V_{i+1})$$

$$C_i(1) = \frac{1}{6}(V_i + 4V_{i+1} + V_{i+2})$$

从上面的端点性质可得

引理 2 若 V_i, V_{i+1}, V_{i+2} 三点共线, 且 $V_{i+1} = \frac{1}{2}(V_i + V_{i+2})$, 则有

$$C_{i-1}(1) = C_i(0) = V_{i+1}$$

即三次均匀 B 样条曲线插值 V_{i+1} 。

2 保凸的三次 B 样条算法

保凸, 保形插值样条曲线在 CAGD 中有着广泛的应用, 它们已被许多作者研究^[8-9]

外推曲线的保凸、保形逼近还有待研究。

设 $C(t)$ 是一条凸的 C^2 连续的曲线, 记 P_0 为一个端点, 按等弧长取点 $P_1, P_2, \dots, P_n, P_n$ 为其右端点。由方程(2)(3)求出 P_0, P_1, \dots, P_n 的等距点 $\tilde{P}_0, \tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n$, 及单位切向量 T_0, T_1, \dots, T_n , 记多边形 $\langle \tilde{P}_0 \tilde{P}_1 \dots \tilde{P}_n \rangle$ 的边向量为

$$\tilde{a}_i = \tilde{P}_i - \tilde{P}_{i-1}, a_i = P_i - P_{i-1}$$

则由引理 1 可知 $\langle \tilde{P}_0 \tilde{P}_1 \dots \tilde{P}_n \rangle$ 是一个凸多边形, 亦即 $\tilde{a}_{i-1} \times \tilde{a}_i$ 与 $\tilde{a}_i \times \tilde{a}_{i+1}$ 同向。我们的目的是构造均匀三次 B 样条曲线插值 $\tilde{P}_0 \tilde{P}_1 \dots \tilde{P}_n$ 。

过 \tilde{P}_i 作 l_i , 过 \tilde{P}_{i+1} 作 l_{i+1} 如下:

$$l_i: \quad r(t) = \tilde{P}_i + tT_i \quad (4)$$

$$l_{i+1}: \quad r(t) = \tilde{P}_{i+1} + tT_{i+1} \quad (5)$$

求 l_i, l_{i+1} 的交点:

$$-tT_{i+1} \times T_i = \tilde{a}_i \times T_i$$

$\tilde{a}_i \times T_i$ 与 $T_{i+1} \times T_i$ 方向相同, 故

$$t = - \frac{|\tilde{a}_i \times T_i|}{|T_{i+1} \times T_i|}$$

交点 $Q_i: \tilde{P}_{i+1} - \frac{|\tilde{a}_i \times T_i|}{|T_{i+1} \times T_i|} T_{i+1}, i=0, 1, \dots, n-1$ 。

在 l_0 上选取两点 M_0, S_0 , l_n 上选取两点 M_n, S_n , 使

$$|\tilde{P}_0 S_0| = |\tilde{P}_0 M_0| = \lambda_0 |\tilde{P}_0 Q_0|$$

$$|\tilde{P}_0 M_0| = |\tilde{P}_n S_n| = \lambda_n |\tilde{P}_n Q_{n-1}|$$

在 l_i 上选取两点 M_i, S_i , 其中 M_i 在 $Q_{i-1} \tilde{P}_i$ 上, S_i 在 $\tilde{P}_i Q_i$ 上使

$$|M_i \tilde{P}_i| = |\tilde{P}_i S_i| = \lambda_i |\min\{|Q_{i-1} - \tilde{P}_i|, |\tilde{P}_i - Q_i|\}|$$

其中 $\alpha = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 是形状控制参数向量, $0 < \lambda < 1, i=0, 1, \dots, n$ 。

以 $\langle M_0 \tilde{P}_0 S_0 M_1 \tilde{P}_1 S_1 \dots M_n \tilde{P}_n S_n \rangle$ 为控制多边形, 作均匀三次 B 样条曲线, 共有 $3n$ 段, 由于 $\tilde{P}_i = \frac{1}{2} (M_i + S_i), i=0, 1, \dots, n$, 由引理 2 这条 B 样条曲线插值 \tilde{P}_i , 如图 (3)。

我们上面构造的外推曲线的均匀三次 B 样条曲线不仅在首末端点处是精确的, 还在中间的 $n-1$ 个等弧长点也是精确的, 克服了文 (1) 在中间段逼近有较大误差的缺点。它还具有下列性质:

(1) 整条曲线是 C^2 连续的; (2) 它是保凸的。

这从 B 样条曲线的性质不难得到。

当生成曲线 $C(t)$ 有拐点的时候, 由 Farouki^[5], 它的外推线 $C_r(t)$ 也有对应的一个拐点, 我们可以作 $C(t)$ 上这个拐点的适当的外推点, 使得它的三次 B 样条逼近曲线也有一个拐点, 以达到保形的目的。

如果只有 $C(t)$ 上的若干个离散点时, 我们也可以用以上的方法来构造过型值点的均匀三次 B 样条曲线。这时只须设

$$T_i = r_i a_i + (1 - r_i) a_{i-1} \quad 0 < r_i < 1$$

来代替式 (4) (5) 中的 T_i 。其中 $\beta = (r_0, r_1, \dots, r_n)$ 是切矢控制参数向量。

3 结论

综合起来, 本文的方法有如下优点:

(1) 外推曲线的 B 样条逼近, 不需求解大型矢量线性方程组, 只需通过简单计算就可求得其控制多边形。

(2) 外推曲线是 C^2 连续的且是保形的。

(3) 调节形状控制向量 α 可以方便地修改逼近曲线的形状, 调节切矢参数向量 β 可以修改生成曲线, 这在实际应用中便于交互式设计。

(4) 曲线的修改有局部性。

作者认为, 只需再加一组控制向量, 本文的方法也将适合于变等距曲线, 而变等距曲线在构造毛刷 (brush-stroke) 上具有很重要的意义。

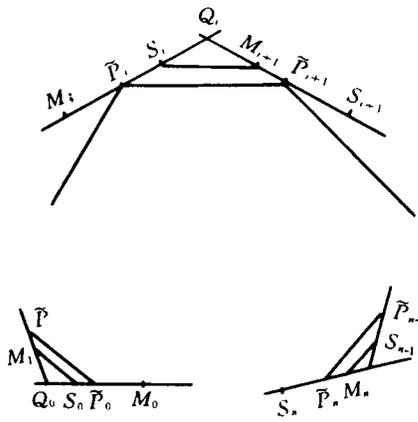


图 3

参 考 文 献

- 1 Klass R. An Offset Spline Approximation for Plane Cubic Splines. *Comput Aided-Des.* 1983, 15 (4): 297~299
- 2 Pham B. Offset Approximation of Uniform B-spline. *Comput Aided-Des.* 1988, 20 (8): 471~474
- 3 Tiller, W and Hanson E. Tiffsets of two-dimensional Profile. *IEEE Comput Graph & Applic* 1984, 9: 36~46
- 4 Coquillart t. Computing Offsets of B-spline curve. *Comput Aided-Des.* 1987, 19 (6): 305~309
- 5 Farouki R and Neff C. Analytic Properties of Plane Offset Curves. *Comput Aided Geom. Des* 1990, 7: 83~99
- 6 Farouki R and Neff C. Algebraic Properties of Plane Offset Curves. *Comput Aided Geom, Des.* 1990, 7: 101~127
- 7 Hoschek. Spline Approximation of Offset Curves. *Comput. Aided Geom. Des.* 1988, 5: 33~40
- 8 方遼, 张新建. C^1 保形插值三次样条函数方法. *数值计算与计算机应用*, 1994: 15 (3)
- 9 方遼, 闭 G^2 连续的保凸插值样条曲线. *工程数学学报*. 1992, 9 (4): 92~97
- 10 谭建荣. *工程曲线曲面的计算机辅助设计*, 南京: 河海大学出版社, 1993
- 11 Hoschek J. Offset Curves in the Plane. *Comput, aided-Des.* 1985, 17 (2): 77~82

Convex-Preserving Interpolation of Offset Curves

Zhu Jubo

(Department of System Engineering and Mathematics, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract

This paper presents an convex-preserving algorithm. Offset curves are approximated by using uniform cubic B-spline

Key words offset curves; B-spline; convex-preserving.