

多频激励微波非线性电路分析 及其同伦连续算法*

汪连栋 赫崇骏

(国防科技大学电子技术系 长沙 410073)

摘要 本文分析了微波非线性电路在多频激励下的频域稳态响应,给出了同伦连续这一简单有效的算法,结合实际计算了实例。

关键词 稳态响应 谐波平衡 最小二乘法 同伦连续算法

分类号 TN72.16

微波非线性电路分析中稳态响应的计算算法主要有 Brute-force 法、shooting 法、谐波平衡法等。这几种方法各有优点,但也存在一些不足之处,如积分时间过长,用牛顿法求解时初值无法选择,另外雅可比矩阵为奇异时上述方法均无能为力。为此本文运用同伦连续算法较好地解决了这些问题。该算法运用谐波平衡法分离非线性电路,在频域内通过快速富里叶变换或最小二乘法建立非线性方程组,再利用描述物理系统的一个变量作为同伦参数建立同伦方程组,解此同伦方程组即可得到电路的解,进而计算出此微波非线性电路的各参数,如稳态响应、频谱等。

1 非线性电路的描述

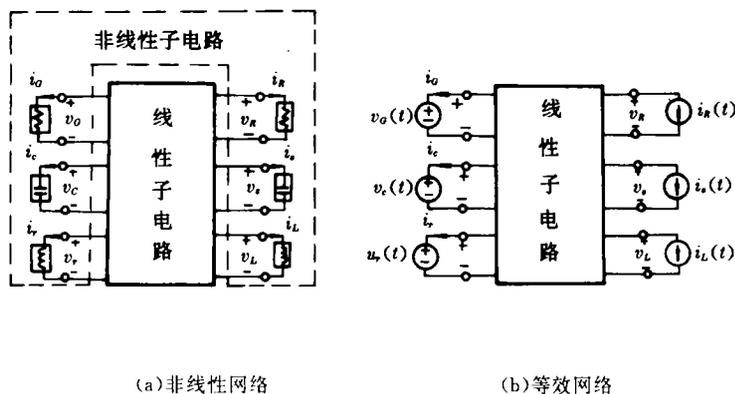


图 1

* 1994年4月20日收稿

非线性电路是由线性元件和非线性元件所组成。非线性元件一般包括：非线性电阻，非线性电容，非线性电感。考虑独立源有 P 个频率分量激励此非线性电路。按谐波平衡原理把电路划分为线性和非线性两大部分，即把非线性元件从电路中抽出来如图 1(a)所示。

非线性元件描述如下：

电压控制的电阻 $i_G = \hat{i}_G(v_G)$ ；电压控制的电容 $q = \hat{q}_c(v_c)$ ；通量控制的电感 $i_r = \hat{i}_r(\phi_r)$ ；电流控制的电阻 $v_R = \hat{v}_R(i_R)$ ；电荷控制的电容 $v_s = \hat{v}_s(q_s)$ ；电流控制的电感 $\phi_L = \hat{\phi}_L(i_L)$ 。

电路激励源有 P 个频率分量为 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p$ 和直流部分。

线性元件包括电阻、电容、电感、线性控制的源等非时变元件。

我们分析电路的稳态响应，并设 $x(t)$ 矢量为，(对应图 1)：

$$x(t) = [v_G(t), v_c(t), \phi_r(t), i_R(t), q_s(t), i_L(t)]^T \quad (1)$$

对矢量 $x(t)$ 每一分量 $x_i(t)$ ，($i=1, 2, \dots, 6$)，展开成广义付里叶级数，为：

$$\begin{aligned} x_i(t) &= x_{i,0} + \sum_{K=1}^M (x_{i,2k-1} \cos \eta_k t + x_{i,2k} \sin \eta_k t) \\ &= R_c(x_{i,0} + \sum_{K=1}^M (x_{i,2k-1} - jx_{i,2k}) \exp(j\eta_k t)) \end{aligned} \quad (2)$$

式中： $\eta_k = m_{1k}\omega_1 + m_{2k}\omega_2 + \dots + m_{pk}\omega_p$ ， $m_{1k}, m_{2k}, \dots, m_{pk}$ 为任意整数。

对于计算实际电路，更高阶的频率分量被忽略，于是选择一常数 B ，使：

$$|m_{1k}| + |m_{2k}| + \dots + |m_{pk}| \leq B \quad (B \text{ 为一整数})$$

2 线性电路分析

用图 1(b)等效非线性电路图 1(a)，即非线性元件用多频电压源和电流源等效。其等效源用(2)式决定。对图 1(b)电路在每一频率点 η_k ($k=0, 1, \dots, M$) 处进行稳态分析。由电路分析理论的混合矩阵的概念，在每一频率点 η_k 上建立方程。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_{1k} \\ V_{2k} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} H_{11k} & H_{12k} \\ H_{21k} & H_{22k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1k} \\ I_{2k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{1k} \\ S_{2k} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{11k} & F_{12k} \\ F_{21k} & F_{22k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1k} \\ X_{2k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{1k} \\ S_{2k} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

式中

$$\begin{aligned} I_{1k} &= \begin{bmatrix} i_{G,2k-1} - j\hat{i}_{G,2k} \\ i_{C,2k-1} - j\hat{i}_{C,2k} \\ i_{r,2k-1} - j\hat{i}_{r,2k} \end{bmatrix}; & V_{2k} &= \begin{bmatrix} v_{R,2k-1} - j\hat{v}_{R,2k} \\ v_{S,2k-1} - j\hat{v}_{S,2k} \\ v_{L,2k-1} - j\hat{v}_{L,2k} \end{bmatrix} \\ V_{1k} &= \begin{bmatrix} v_{G,2k-1} - j\hat{v}_{G,2k} \\ v_{C,2k-1} - j\hat{v}_{C,2k} \\ j\eta_k(\phi_{r,2k-1} - j\hat{\phi}_{r,2k}) \end{bmatrix}; & I_{2k} &= \begin{bmatrix} i_{R,2k-1} - j\hat{i}_{R,2k} \\ j\eta_k(q_{S,2k-1} - j\hat{q}_{S,2k}) \\ j_{L,2k-1} - j\hat{i}_{L,2k} \end{bmatrix} \\ X_{1k} &= \begin{bmatrix} v_{G,2k-1} - j\hat{v}_{G,2k} \\ v_{C,2k-1} - j\hat{v}_{C,2k} \\ \phi_{r,2k-1} - j\hat{\phi}_{r,2k} \end{bmatrix}; & X_{2k} &= \begin{bmatrix} i_{R,2k-1} - j\hat{i}_{R,2k} \\ q_{S,2k-1} - j\hat{q}_{S,2k} \\ j_{L,2k-1} - j\hat{i}_{L,2k} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

混合矩阵 H 由具体电路得出。比较上述各矩阵, F 矩阵可方便地由 H 矩阵得出。导出 F 矩阵目的是分离出非线性元件的控制量。 S 矩阵是有关除非线性元件等效源之外的源的矩阵。

把(2)式代入(3)式, 得出:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} i_{10} \\ v_{20} \end{bmatrix} + \operatorname{Re} \sum_{K=1}^M \begin{bmatrix} I_{1k} \\ V_{2k} \end{bmatrix} \exp(j\eta_k t) \\ &= \begin{bmatrix} i_{10} \\ v_{20} \end{bmatrix} + \operatorname{Re} \left[\sum_{K=1}^M \begin{bmatrix} F_{11k} & F_{12k} \\ F_{21k} & F_{22k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1k}^R + jX_{1k}^I \\ X_{2k}^R + jX_{2k}^I \end{bmatrix} \exp(j\eta_k t) \right] + \operatorname{Re} \left[\begin{bmatrix} S_{1k} \\ S_{2k} \end{bmatrix} \exp(j\eta_k t) \right] \end{aligned} \quad (4)$$

式中, $i_1(t) = [i_G(t), i_C(t), i_R(t)]^T$, $v_2(t) = [v_R(t), v_S(t), v_L(t)]^T$ 上角标 R, I 代表相应向量的实、虚部。

$$\begin{aligned} X_{1k}^R &= \begin{bmatrix} v_{G,2k-1} \\ v_{C,2k-1} \\ \phi_{R,2k-1} \end{bmatrix} & X_{1k}^I &= \begin{bmatrix} v_{G,2k} \\ v_{C,2k} \\ \phi_{R,2k} \end{bmatrix} \\ X_{2k}^R &= \begin{bmatrix} i_{R,2k-1} \\ q_{S,2k-1} \\ j_{L,2k-1} \end{bmatrix} & X_{2k}^I &= - \begin{bmatrix} i_{R,2k} \\ q_{S,2k} \\ j_{L,2k} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

这样式(4)就给出了图 1(b)端口处的显式关系。

3 非线性电路分析

上述已经对图 1(b)在已知 $x_i(t)$ 的情况的电路分析, 但 $x_i(t)$ 由(1)式知它是非线性元件的控制参数, 仍是个未知数。下面我们通过非线性元件着手分析。

非线性元件用下式来描述(对应图 1(a))。

$$Y(t) = Y(X(t)) = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{i}_G(v_G(t)) \\ \partial \hat{q}_C(v_C) / \partial v_C \cdot dv_C(t) / dt \\ \hat{i}_R(\phi_R(t)) \\ \hat{v}_R(i_R(t)) \\ \hat{v}_S(q_S(t)) \\ \partial \hat{\phi}(i_L) / \partial i_L \cdot di_L(t) / dt \end{bmatrix} \quad (5)$$

利用广义付里叶级数展开 $Y(t)$ 每一分量 $y_i(t)$, ($i=1, 2, \dots, 6$) 有:

$$y_i(t) = b_{i,0}(x_i) + \sum_{K=1}^{\hat{M}} (b_{i,2k-1}(x_i) \cos(\eta_k t) + b_{i,2k}(x_i) \sin(\eta_k t)) \quad (6)$$

定义系数矢量 $b_i(x_i)$ 为:

$$b_i(x_i) = [b_{i,0}(x_i), b_{i,1}(x_i), \dots, b_{i,2\hat{M}}(x_i)]^T \quad (7)$$

定义(2)式中的系数矢量 $x_i = [x_{i,0}, x_{i,1}, \dots, x_{i,2\hat{M}}]^T$, 又 $\hat{M} \geq M$ 包含所有非线性元件所产生的新的频率分量, 从(2)式知我们只需 $2\hat{M}+1$ 个独立方程, 故(7)式仅取到 $2\hat{M}$ 。

由于(6)式 $y_i(t)$ 一般是非周期的, 且频率 η_k 不仅包含谐波频率, 而且还包括各阶调

制频率, 那么系数向量 $b_i(x_i)$ 不能用离散富里叶变换来计算, 我们将采用最小二乘法来计算 $b_i(x_i)$ 。

取 Δt 为激励信号时域采样步长, $N+1$ 为采样点数, 由(6)式有

$$y_i(\Delta t, N, x_i) = \Gamma(\Delta t, N) b_i(\Delta t, N, x_i) \quad (8)$$

$$\text{式中: } y_i(\Delta t, N, x_i) = \begin{bmatrix} y_i(0) \\ y_i(\Delta t) \\ \vdots \\ y_i(N\Delta t) \end{bmatrix} \quad b_i(\Delta t, N, x_i) = \begin{bmatrix} b_{i,0}(\Delta t, N, x_i) \\ b_{i,1}(\Delta t, N, x_i) \\ \vdots \\ b_{i,2M}(\Delta t, N, x_i) \end{bmatrix}$$

$$\Gamma(\Delta t, N) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & \cos\eta_1\Delta t & \sin\eta_1\Delta t & \cdots & \cos\eta_M\Delta t & \sin\eta_M\Delta t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos N\eta_1\Delta t & \sin N\eta_1\Delta t & \cdots & \cos N\eta_M\Delta t & \sin N\eta_M\Delta t \end{bmatrix}$$

其中 $\Gamma(\Delta t, N)$ 为 $(1+N) \times (2M+1)$ 阶矩阵。

应用最小二乘法公式, 得出 $b_i(\Delta t, N, x_i)$ 系数公式为:

$$b_i(\Delta t, N, x_i) = W^{-1}(\Delta t, N) \Gamma^T(\Delta t, N) y_i(\Delta t, N, x_i) \quad (9)$$

$$\text{式中: } W(\Delta t, N) = \Gamma^T(\Delta t, N) \Gamma(\Delta t, N)$$

根据谐波平衡原理, 把(6)式代入(4)式, 在每一个非线性元件端口处(由 KCL、KVL)可建立 $2M+1$ 个(对应于 $\cos\eta_i t, \sin\eta_i t$ 及直流)的方程。有 n 个非线性元件时可得 $n(2M+1)$ 个方程。这些非线性方程写成矩阵形式为:

$$F(\Delta t, N, x) = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1(\Delta t, N, x_1) \\ b_2(\Delta t, N, x_2) \\ \vdots \\ b_n(\Delta t, N, x_n) \end{bmatrix} = 0 \quad (10)$$

式中: A 为 $[a_{ij}]_{n \times n}$, ($i, j=1, 2, \dots, n$), A 为 $n(2M+1)$ 阶方阵。

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} F_{ij}^0 \\ F_{ij}^R - F_{ij}^I \\ -F_{ij}^I - F_{ij}^R \\ \vdots \\ F_{ij}^R - F_{ij}^I \\ -F_{ij}^I - F_{ij}^R \end{bmatrix}$$

4 用同伦连续算法解方程组

对上述所建立的微波非线性电路的方程组(10), 可用同伦连续算法来解。解法的思想是: 基于描述物理系统的变量和其参数间具有的相依性, 此引入一参数 τ , 构造一族映射 G , 使得 τ 为某一特定值时 G 就是 F , 称 G 为 F 的同伦函数。即:

$$G(x(\tau), \tau) = 0 \quad (11)$$

式中: $x=x(\tau)$ 表示 R^n (x 为 n 维的) 空间解曲线。

构造同伦函数的方法很多,典型的方法之一是自然插入法。

$$G_n(x(\tau), \tau) = F(x(\tau), \tau) = 0 \quad (12)$$

初值为一已知值,如 τ 代表源强度控制参数, $\tau=0$ 时系统必然为零。方法二为人工插入方式。

$$G_n(x(\tau), \tau) = F(x) - (1 - \tau)F(x^0) \quad (13)$$

式中 x^0 为任意初始值。因 $\tau=0$, x^0 为(13)式的解,故当 $\tau=1$ 时, $G(x,1)=F(x)$,这样可得原方程组(10)的解。

为了克服空间解曲线上存在的奇异点问题,采用预测——校正跟踪解曲线,具体算法如下:

(1)选初始值。 h_0 ——开始步长, ϵ ——允许精度, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$; α_1 、 α_2 的步长控制因子。

(2)预测,取下一预测点 $z^0 = y' + h_i u'$,其中空间解曲线上的还是 $y' = (x', \tau)$ 。 h_i 为一确定的步长, u' 为空间解曲线切向向量,即:

$$\begin{bmatrix} G'(y')u' \\ (u')^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{且 } (u'^{-1})^T \cdot u' > 0 \quad (14)$$

式中: $G'(y')$ 为所构造同伦函数的导数。

(3)校正、解下列方程

$$\begin{cases} G'(z^0)W^k = -G(z^k) \\ (u^k)^T W^k = 0 \quad (k = 0, 1, \dots) \\ z^{k+1} = z^k + W^k \end{cases} \quad (15)$$

(4)自动选择步长 h_i

$$\text{由(3)迭代两次} \begin{cases} z^1 = z^0 + w^0 \\ z^2 = z^1 + W^1 \end{cases}$$

若 $\|W^1\| > \alpha_2 \|W^0\|$, 则令 $h_i = \frac{1}{2}h$, 转向(2);若 $\|W^1\| < \alpha_1 \|W^0\|$, 则令 $h_{i+1} = 2h$, 继续(5);若 $\alpha_1 \|W^0\| < \|W^1\| < \alpha_2 \|W^0\|$, 则令 $h_{i+1} = h$, 继续(5)。

(5)继续迭代,直到满足 $\|G(z^k)\| < \epsilon \|G'(z^0)\|$ 则该点迭代完成,令 $i = i + 1$ 继续(2)。

5 程序框图(见图 2)

6 应用实例

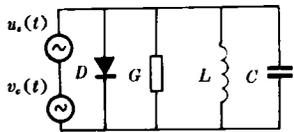
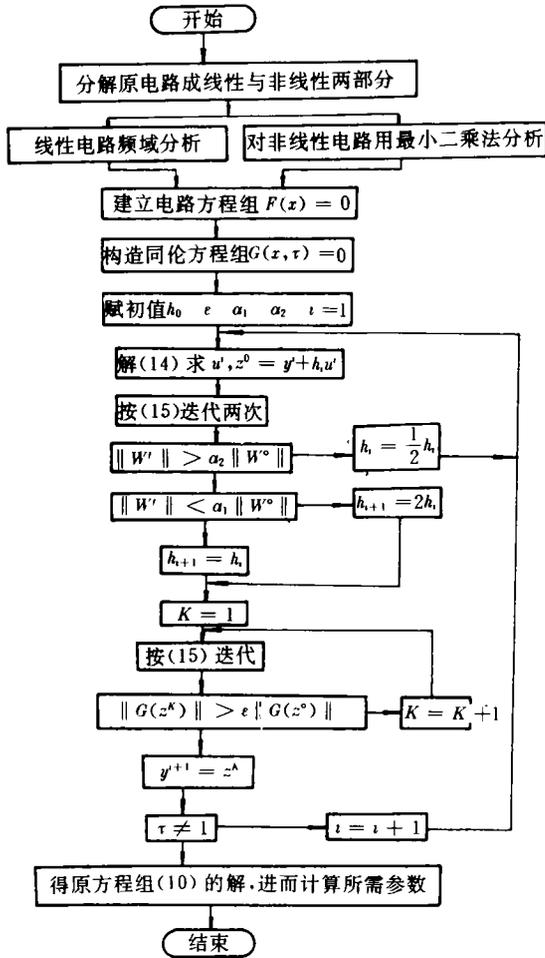
6.1 单二级管混频电路

电路图如图 3 所示。非线性元件为二极管关系式为 $i = I_s(e^{u/V_T} - 1)$, 激励源为 $S(t) = A_1 \cos \omega_s t + A_2 \cos \omega_l t$ 用本文方法解此电路, 迭 $B = 3$, $M = 20$, $N = 100$, $\Delta t = 0.88 \times 10^{-8} \text{S}$ 得到如图 4 的响应。此电路是广泛使用的典型电路,其结果是准确的。

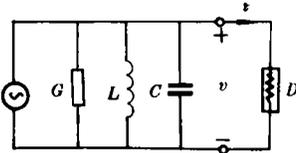
6.2 单级三级管放大电路

电路原理图如图 5, 利用图 6 的晶体管等效模型来分析电路, 整个电路有两个非线性

性元件。设输入为 $i_s(t) = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t$ 。其响应的频谱图在单频输入时为图 7，两个频率是输入时为图 8。选择 $f_1 = 1\text{GHz}$, $f_2 = 0.87\text{GHz}$, $A_1 = A_2 = 0.005\text{A}$, $B = 3$, $\Delta t = 1.4 \times 10^{-10}\text{s}$, $N = 100$ 。



(a) 原理图



(b) 等效电路

图 2

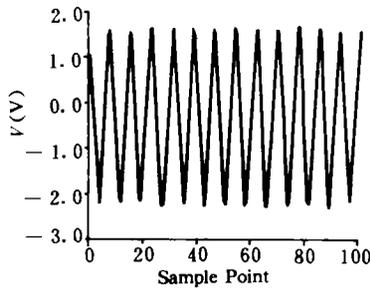


图 3 二极管混频电路 $\left(\begin{matrix} L = 0.25\mu\text{H} \\ C = 10\text{pF} \\ G = 11\text{S} \\ i_D = 10^{-6}(e^{38.9v} - 1) \end{matrix} \right)$ 图 4 图 2 中 v 的稳态响应 $\left(\begin{matrix} A_1 = 0.9\text{V} \\ A_2 = 1.1\text{V} \\ \omega_1 = 10^9\text{rad/s} \\ \omega_2 = 0.8 \times 10^9\text{rad/s} \end{matrix} \right)$

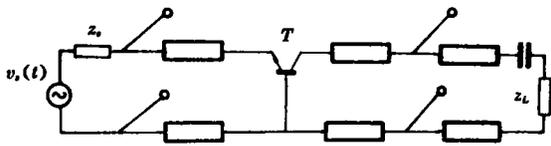


图 5 微波晶体管放大器原理图

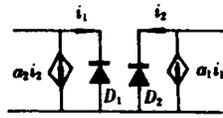


图 6 晶体管等效电路图 $\alpha_1=1$ $\alpha_2=0.5$

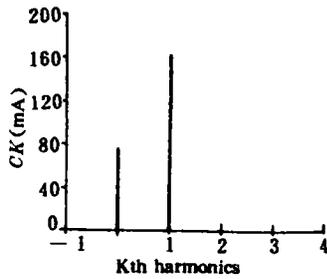


图 7 单频输入时的晶体管集电极电流频谱 ($M=8$)

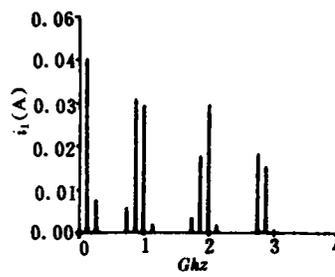


图 8 两个输入源时图 5 中 i_1 的频谱图

参 考 文 献

- 1 L O Chua, A Ushida. Algorithms for computing almost periodic steady-state response of nonlinear systems to multiple input frequencies. IEEE Trans. Circuits Syst. 1981. CAS-28 953-971
- 2 L O Chua and P M Lin Computer-Aided Analysis of electronic Circuits, Algorithms and Computational Techniques. Englewood Cliffs, NJ; Prentice-Hall 1975
- 3 L O Chua C Y Ng. Frequency domain analysis of nonlinear systems; General theory IEEJ Electron Circuits Syst. 1979, 3:165-185
- 4 M S Nakhla and J Vlach. A piecewise harmonic balance technique for determination periodic response of nonlinear systems. IEEE Trans. 1976. rAS-2(2)
- 5 A Ushida and L O Chua Frequency-domain analysis of Nonlinear circuit driven by multi-tone signals. IEEE Trans. 1984, CAS-31(9):766-778

The Analysis of Microwave Nonlinear Circuits Driven by Multi-Tone Signals with Homotopy Continuous Algorithm

Wang Liandong He Chongjun
(Department of Electronic Technology)

Abstract

In this paper, the steady-state response of a microwave nonlinear circuit driven by multi-tone signals is analyzed. An efficient homotopy continuous algorithm is provided and some practicalities are shown.

Key words steady-state response, harmonic balance, least square approach, homotopy continuous algorithm.