

泡沫塑料衬垫的粘弹性有限元分析*

沈怀荣 郝松林

(国防科技大学航天技术系 长沙 410073)

摘要 介绍了一种用于聚氨酯泡沫塑料衬垫的粘弹性有限元分析程序,利用积分本构关系计算了轴对称衬垫中的应力松弛。从数值结果可见,当衬垫贮存1000小时以后,装配应力大约松弛了25%。

关键词 应力松弛, 泡沫塑料, 粘弹性

分类号 O343.7

Viscoelastic Finite Element Analysis of a Cellular Plastic Bush

Shen Huairong Hao Songlin

(Department of Aerospace Technology, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract In this paper, the viscoelastic finite element analysis program used for a polyurethane cellular plastic bush is discussed. Stress relaxation in the axisymmetric bush is calculated by utilizing integral constitutive relation. It can be seen from the numerical results that the assembling stress relaxes by about 25% after the bush has been stored by 1000 hours.

Key words stress relaxation, cellular plastic, viscoelasticity

随着工程和日常生活中聚合物材料的广泛应用,粘弹性结构的应力分析显得日益重要,受到许多研究者的重视。Brilla^[1]、Strinatha^[2]等采用线粘弹本构关系进行了平面问题的分析,文献[3]采用线粘弹微分型本构关系,文献[4]采用Swanson的非线性本构关系,考虑了几何非线性进行了三维药柱的分析,作者^[5,6]曾分别采用线粘弹积分蠕变型本构关系进行了平面问题分析,建立了与机械操作损伤耦合的非线性粘弹结构的分析算法,编制了相应的分析软件并进行了非线性有限元分析。

本文受中国工程物理研究院总体工程研究所委托,对安装于球壳头部的粘弹性泡沫

* 中国工程物理研究院科学基金资助项目
1995年4月13日收稿

衬垫进行了粘弹性有限元分析。本文采用粘弹积分松弛型本构关系,编制了可分析平面问题,三维轴对称问题,以及可同时处理力边界和位移边界条件的粘弹性有限元程序。最后根据委托单位要求,对球壳头部的粘弹性衬垫进行了分析。

1 本构关系与有限元列式

等温条件下,各向异性线粘弹积分松弛型本构关系一般地可表为^[7]

$$\sigma_{ij} = \int_{-\infty}^t G_{ijk}(t-\tau) \frac{\partial \epsilon_{kl}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (1)$$

对于各向同性粘弹材料,积分核函数可写成:

$$G_{ijk}(t) = \frac{G_2(t) - G_1(t)}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{G_1(t)}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2)$$

其中, G_1 为剪切松弛函数, G_2 为各向同性压缩松弛函数, δ_{ij} 为 KRONEKER 符号。且

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad (3)$$

将(2)式代入(1)式得(省写变量 t)

$$\sigma_{ij} = \int_{-\infty}^t G_1(t-\tau) \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial \tau} d\tau + \frac{\delta_{ij}}{3} \int_{-\infty}^t [G_2(t-\tau) - G_1(t-\tau)] \frac{\partial \epsilon_{kk}}{\partial \tau} d\tau \quad (4)$$

在工程应用中,常常容易测得单轴松弛模量 $E(t)$, 并假设泊松比为常数,则 G_1 、 G_2 、 ν 之间有如下关系:

$$G_2/G_1 = (1+\nu)/(1-2\nu) = \mu \quad (5)$$

$$G_1/2 = E/2(1+\nu) \quad (6)$$

则本构关系可简化为

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \int_{-\infty}^t G_1(t-\tau) \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial \tau} d\tau + \frac{\delta_{ij}}{3} \int_{-\infty}^t (\mu-1)G_1(t-\tau) \frac{\partial \epsilon_{kk}}{\partial \tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^t G_1(t-\tau) \left[\frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial \tau} + \delta_{ij} \frac{\mu-1}{3} \frac{\partial \epsilon_{kk}}{\partial \tau} \right] d\tau \end{aligned} \quad (7)$$

代入 $G_1 = E/(1+\nu)$, $1+(\mu-1)/3 = (1-\nu)/(1-2\nu)$ 并写成矩阵形式为

$$\{\sigma\} = E_0 [D] \int_{-\infty}^t E(t-\tau) \{\dot{\epsilon}\} d\tau \quad (8)$$

其中 $\{\sigma\}^T = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}\} \quad (9)$

$$\{\dot{\epsilon}\}^T = \left\{ \frac{\partial \epsilon_{11}}{\partial t}, \frac{\partial \epsilon_{22}}{\partial t}, \frac{\partial \epsilon_{33}}{\partial t}, \frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial t}, \frac{\partial \epsilon_{23}}{\partial t}, \frac{\partial \epsilon_{31}}{\partial t} \right\} \quad (10)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \frac{\nu}{1-\nu} & & & & \\ & & 1 & & & \\ & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & & & \\ & & & (1-2\nu)/2(1-\nu) & & \\ & & & (1-2\nu)/2(1-\nu) & & \\ & & & & (1-2\nu)/2(1-\nu) & \end{bmatrix} \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (11)$$

由(8)~(11)式可知,令 $[D]=E_0[\bar{D}]$,则其材料常数矩阵 $[D]$ 与一般粘弹性材料仅差一与松弛模量有关的时间积分因子。这里松弛模量由单轴松弛实验结果可以一般地用以下的 PRONY 级数表示成:

$$E(t) = \sum_{r=0}^m E_r e^{-\lambda_r t}$$

为了有限元分析方便,本文把 PRONY 级数改写成如下形式,不难证明它们的等价性。

$$E(t) = E_0 - \sum_{r=1}^m E_r (1 - e^{-\lambda_r t}) = E_0 \left[1 - \sum_{r=1}^m \frac{E_r}{E_0} (1 - e^{-\lambda_r t}) \right] \quad (13)$$

一般 PRONY 级数每增加一项,可多表示一个十进时间量级的实验数据,由上式可知

$$E(0) = E_0 \quad (14)$$

$$E(\infty) = E_0 - \sum_{r=1}^m E_r \quad (15)$$

即说明 E_0 是 $t=0$ 时的瞬时弹性模量, $E(\infty)$ 为长期平衡模量。

将(13)式代入(8)中,可得到:

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= [D] \int_{-\infty}^t (1 - E_c(t - \tau)) \{\dot{\epsilon}\} d\tau \\ &= [D] \{\epsilon\} - [D] \int_{-\infty}^t E_c(t - \tau) \{\dot{\epsilon}\} d\tau = [D][\{\epsilon\} - \{h\}] \end{aligned} \quad (16)$$

$$\text{其中 } E_c(t) = \sum_{r=1}^m \frac{E_r}{E_0} (1 - e^{-\lambda_r t})$$

$$\{h\} = \int_{-\infty}^t E_c(t - \tau) \{\dot{\epsilon}(\tau)\} d\tau \quad (18)$$

采用增量有限元法,需求增量本构关系。由(16)式得

$$d\{\sigma\} = [D](d\{\epsilon\} - d\{h\}) \quad (19)$$

采用积分号下求微分规则,假定时间从 $t=0$ 开始。由于 $t < 0$ 时, $E_c=0$, 则

$$d\{h\} = E_c(0) \left\{ \frac{\partial \epsilon}{\partial t} \right\} dt + \int_0^t \frac{\partial E_c(t - \tau)}{\partial t} \left\{ \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} \right\} d\tau dt = \{H(t)\} dt \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \{H(t)\} &= \int_0^t \frac{\partial E_c(t - \tau)}{\partial t} \left\{ \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} \right\} d\tau \\ &= \int_0^t \sum_{r=1}^m \frac{E_r}{E_0} \lambda_r e^{-\lambda_r(t-\tau)} \left\{ \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} \right\} d\tau \\ &= \sum_{r=1}^m \frac{E_r}{E_0} \lambda_r \int_0^t e^{-\lambda_r(t-\tau)} \left\{ \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} \right\} d\tau \end{aligned}$$

$$\text{得 } H_j(t) = \sum_{r=1}^m T_{rj}$$

$$\text{其中 } T_{rj} = \frac{E_r}{E_0} \lambda_r \int_0^t e^{-\lambda_r(t-\tau)} \frac{\partial \epsilon_j}{\partial \tau} d\tau$$

将时间 t 分成 n 段。时间步长 $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$, 则

$$\begin{aligned} T_{rj}^{n+1} &= \frac{E_r}{E_0} \lambda_r \int_0^{t_{n+1}} e^{-\lambda_r(t_{n+1}-\tau)} \frac{\partial \epsilon_j}{\partial \tau} d\tau \\ &= \frac{E_r}{E_0} \lambda_r \left[\int_0^{t_n} e^{-\lambda_r(t_{n+1}-\tau)} \frac{\partial \epsilon_j}{\partial \tau} d\tau + \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-\lambda_r(t_{n+1}-\tau)} \frac{\partial \epsilon_j}{\partial \tau} d\tau \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= e^{-\lambda_r \Delta t_{n+1}} \frac{E_r \lambda_r}{E_0} \int_0^{t_n} e^{-\lambda_r (t_n - \tau)} \frac{\partial \epsilon_j}{\partial \tau} d\tau + \frac{E_r \lambda_r \partial \epsilon_j}{E_0 \partial t} \Big|_{t=t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-\lambda_r (t_{n+1} - \tau)} d\tau \\
 &= e^{-\lambda_r \Delta t_{n+1}} T_{rj}^n + \frac{E_r \partial \epsilon_j}{E_0 \partial \tau} \Big|_{t=t_n} (1 - e^{-\lambda_r \Delta t_{n+1}})
 \end{aligned} \tag{22}$$

此即为与时间历史有关的有限元计算递推公式。式中，上标 $n+1$ 和 n 表示与时间步有关的物理量。采用递推公式可以避免在每一步时间步长中都要求计算和存储大量以往的应变历史数据，从而减少了内存与计算时间。其中，在 Δt_n 段时间区间内， $\partial \epsilon_j / \partial t$ 可近似取 $\Delta \epsilon_j / \Delta t_{n+1}$ 作为该应变分量的变化速率。

增量型本构关系可写成

$$\Delta \{\sigma\}^{n+1} = [D] \left[\Delta \{\epsilon\}^{n+1} - \sum_{r=1}^m T_{rj}^{n+1} \Delta t_{n+1} \right] \tag{23}$$

$t=t_{n+1}$ 时刻的虚功方程为

$$\int_v [\{\sigma\}^T \{\delta \epsilon\} dv = \{P\}^T \{\delta q\} \tag{24}$$

代入本构关系(23)式和引入只与单元坐标有关的单位形函数 $[N]$ ，使位移增量向量 $\Delta U = [N] \{\Delta q\}$ ， $\{\Delta \epsilon\} = [B] \{\Delta q\}$ 。整理后可得

$$[K] \{\Delta q\} = \{P_e\} + \{P_i\} + \{P_v\}$$

其中 $[K] = \int_v [B]^T [D] [B] dv$ 为基本的单元刚度矩阵；

$\{P_i\} = \int_v [B]^T \{\sigma\}^* dv$ 为已有初应力引起的节点力向量；

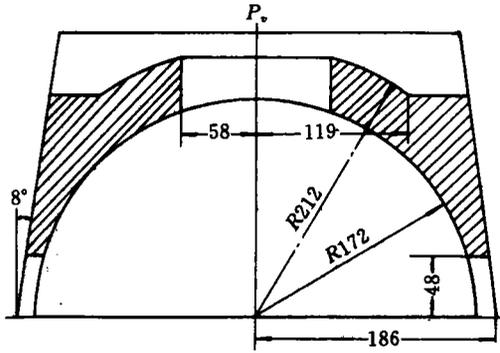


图1 结构简图

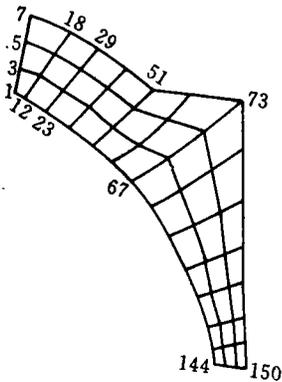


图2 有限元网格划分图

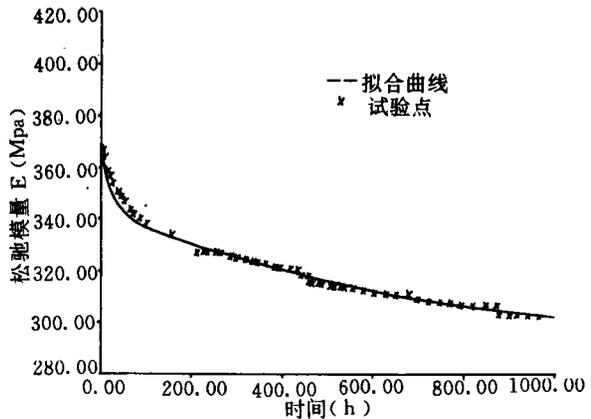


图4 结构变形情况

$\{P_v\} = \int_v [B]^T [D] d\{h\} dv$ 为粘弹性应变历史引起的节点力向量;

$\{P_e\}$ 为外力引起的节点力向量。

上列式中, $\{\Delta q\}$ 为单元结点位移增量的向量。

文中采用 8 结点等参单元, 编制了适合平面问题及三维轴对称问题的有限元程序软件。为了能在 386 微型机上求解较大型结构, 本文采用波前法求解方程, 同时可根据计算机内存确定求解过程缓冲数组的大小, 以尽可能提高运算速度。

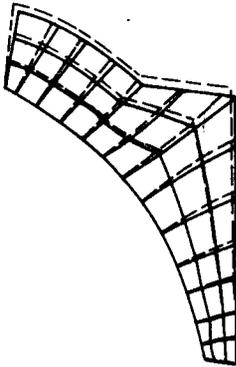


图 3 PRONY 级数拟合与实验比较

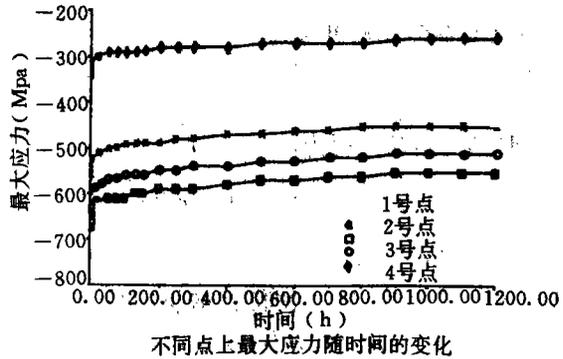


图 5 结点主应力变化情况

2 结构分析结果及简单结论

图 1 示出结构简图, 图中球形衬垫采用泡沫塑料材料, 为粘弹性体, 可作为轴对称问题求解。实际使用时由衬垫上端加一端盖, 用螺栓压紧端盖, 当达到一定预紧力后停止压紧。显然这一问题简化成位移边界条件较好, 即假设上端边界各点在螺栓作用下产生一均匀向下位移, 当位移达到一定值时保持不变, 其粘弹体内发生应力松弛。本文取该位移为 0.6mm。

图 2 示出有限元网格划分情况, 共 39 个单位, 150 个结点, 300 个联立线性方程组。为了获得粘弹性材料的材料参数, 作者对粘弹性体垫块材料进行了压缩松弛实验。试验得出 1000h 压缩松弛实验数据。为了获得用 PRONY 级数拟合的参数, 专门编制了拟合程序, 经过拟合得到的 PRONY 级数为

$$E(t) = 405 - 35.3(1 - e^{-5t}) - 25.3(1 - e^{-0.05t}) - 54.4(1 - e^{-0.0015t})$$

图 3 示出拟合曲线与实验结果的比较情况, 由图可见, 二者吻合较好。

由实验测得的粘弹性材料的泊松比 $\nu = 0.25 \sim 0.28$ 之间, 本文取 $\nu = 0.26$ 计算。

图 4 示出结构在初始状态 ($t=0$) (实线表示) 和 $t=1200h$ (虚线表示) 时的变形比较情况。

图 5 示出 1、7、51 和 73 号结点的最大压缩应力随时间的松弛情况。这些点的应力较其他点要大一些。图中可见, 其应力的松弛规律与松弛模量的变化规律相似。因此, 知道了初始的应力分布, 由松弛实验曲线, 即可大概估计后期的应力情况。

参 考 文 献

- 1 Brilla J, et al. The Generalization of the Finite Element Method for the Solution of Viscoelastic Two-dimensional Problems. Mech of Viscoelastic Media And Bodies, Ed J Hult, 1974; 229
- 2 Strinatha H R. A Finite Element Method for Thermoviscoelastic Analysis of Plane problems. Computer Methods in Applied Mechanics And Engoneering, 1981, 25: 21~23
- 3 沈亚鹏. 固体火箭发动机药柱三维有限元应力分析. 见: 固体火箭发动机学术交流会论文汇编(第二册), 1984
- 4 陈宜亨. 固体推进剂药柱的非线性粘弹性静动力问题的有限元分析计算: [学位论文]. 西安: 西安交通大学, 1986
- 5 沈怀荣. 固体推进剂的粘弹性操作损伤分析及有关理论探讨: [学位论文]. 长沙: 国防科技大学, 1985
- 6 沈怀荣. Analysis for Nonlinear Viscoelastic Structures by FEM, Proc. ICCM, Science press, 1987; 583~588
- 7 郝松林. 粘弹性力学基础(上). 长沙: 国防科技大学出版社, 1983: 65

(责任编辑 卢天贶)