国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第18卷第3期 1996年9月 Vol. 18 No. 3

$^*X$ 中的 Q-拓扑、$^*\tau$ 拓扑、$\mathscr{F}_\tau$ 拓扑及其性质*

覃左平
(国防科技大学系统工程与数学系 长沙 410073)

摘 要 本文对 $^*X$ 中的三种常用拓扑进行了研究，得到了一些性质。特别地，通过对 $^*X$ 的商拓扑的研究，得到了 Tychonoff 空间的 Stone-Cech 紧扩张定理的非标准证明。

关键词 拓扑，紧扩张，非标准扩张。
分类号 O189

Q—Topology, $^*\tau$-Topology, $\mathscr{F}_\tau$-Topology and their Properties in *X

Qing Zhuoping
(Department of Systems Engineering and Applied Mathematics, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract In this paper, we study several toplogies such as Q, $^*\tau$, $\mathscr{F}_\tau$ in $^*X$ and obtain some properties. Eospecially, we give another proof of the Stone-Cech theorem by studying quotient, topologies of $^*X$.

Key words Topology, Compact extension, Non-Standard extension

1 $^*X$ 中的拓扑

设 $\mathscr{U}$ 是一个超结构，$^*\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{U}$ 的非标准扩张。又设 (X,τ) 为拓扑空间，且 $X\in\mathscr{U}$，并设 $^*\mathscr{U}$ 是 κ-饱和的，而 $\mathrm{Card}(\mathscr{P}(X))<\kappa$。这里 $\mathscr{P}(X)$ 为 X 的子集全体。

记 $^*X$ 为 X 的非标准扩张，定义 $^*X$ 中的与 τ 有关的几种常用拓扑。

1) Q-拓扑[4]：Q-拓扑为 $^*X$ 中的所有内开集生成的拓扑。亦即设 τ 为 X 中的开集全体，$^*\tau$ 中的元生成的 $^*X$ 中的拓扑。

2) $^*\tau$ 拓扑：$A\in {}^*\tau$ 当且仅当 $A=\bigcup\limits_{\alpha}{}^*G_\alpha$。这里 $G_\alpha\in\tau$，即 $^*\tau$ 拓扑是由标准开集的非标准扩张生成的拓扑。

---

* 国家自然科学基金资助项目
1995年5月21日修订

3) $\mathscr{F}_\tau$ 拓扑：$A\in\mathscr{F}_\tau$ 当且仅当 $A=\bigcup\limits_\alpha {}^*F_\alpha$。这里 F_α 为 X 的闭子集，即 $\mathscr{F}_\tau$ 拓扑是由标准闭集的非标准扩张生成的拓扑。

下面根据定义建立这几种拓扑之间，以及它们与 τ 的关系。

定理 1：(1) 若 τ 是 T_2 的，则 Q 亦为 T_2 的；

(2) ${}^*X$ 关于 ${}^*\tau$ 及 $\mathscr{F}_\tau$ 是紧的；

(3) ${}^*\tau|_X=\tau$，$Q|_X\geqslant\tau$；

(4) 若 X 是 T_1 的，则 $\mathscr{F}_\tau|_X$ 为 X 上的离散拓扑；

(5) $Q\geqslant{}^*\tau$，且等号成立当且仅当 τ 是有限的。

证明　(1) 若 X 是 Hausdorff 的，则下述语句为真：

$$[\forall x,\ \forall y,\ (x\in X、y\in X)\ x\neq y]\Rightarrow\exists\ V_1\in\tau、V_2\in\tau$$

s·t $V_1\cap V_2=\phi$ 且 $x\in V_1$，$y\in V_2$。由转换原理及 Q 的定义即知，Q 是 T_2 的。

(2) 设 $\bigcup\limits_\alpha G_\alpha={}^*X$ 为 ${}^*X$ 的任一 ${}^*\tau$ 开覆盖，因 G_α 为 ${}^*X$ 的 ${}^*\tau$ 开子集，故 $G_\alpha=\bigcup\limits_\beta {}^*G_{\alpha\beta}$，于是有 $\bigcup\limits_{\alpha,\beta}{}^*G_{\alpha\beta}={}^*X$；又由于 Gard$(\mathscr{P}(X))<k$，及文[1]定理 2.9.1 知，存在有限集 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 使 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}G_{\alpha_i}=X$，于是 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}{}^*G_{\alpha_i}={}^*X$，从而 ${}^*X$ 是 ${}^*\tau$ 紧的，同理可证 $({}^*X,\mathscr{F}_\tau)$ 是紧空间。

(3) $\forall G\in\tau$，${}^*G\cap X=G$，故 ${}^*\tau|_X\geqslant\tau$，其次，设 $G=\bigcup\limits_\alpha {}^*G_\alpha\in{}^*\tau$，则 $G\cap X=\bigcup\limits_\alpha {}^*G_\alpha\cap X=\bigcup\limits_\alpha G_\alpha\in\tau$，故 ${}^*\tau|_X\leqslant\tau$，从而 ${}^*\tau|_X=\tau$。

(4) 若 X 是 T_1 空间，则 X 的每个单点集为闭集，于是 X 的每个单点集为 $\mathscr{F}_\tau$ 开集，从而 $\mathscr{F}_\tau|X$ 为离散空间。

(5) 由定义，显然 $Q\geqslant{}^*\tau$。若 $Q={}^*\tau$，则若 τ 为无限集，则必存在 $G\in{}^*\tau$，使 G 不是 τ 的元的非标准扩张；但由于 $G\in{}^*\tau$，故知 $G=\bigcup\limits_\alpha {}^*G_\alpha$；又由于 G 是内集，由文[1]定理 2.9.1 知，有有限个 G_{α_i} 使 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}{}^*G_{\alpha_i}=G$，从而 $G={}^*(\bigcup\limits_{i=1}^{n}G_{\alpha_i})$，得出矛盾，故 τ 必为有限的。反之，若 τ 为有限的，显然有 $Q={}^*\tau$。

若 X 为度量空间，ρ 为 X 的度量，在 ${}^*X$ 中定义拓扑 S：$A\subset{}^*X$ 为 s-开集，当且仅当 $\forall x\in A$，存在 $\varepsilon>0(\varepsilon\in R_+)$，使 $\{y|{}^*\rho(x,y)<\varepsilon\}\subset A$。

定理 2：设 (X,ρ) 为度量空间，则

(1) ${}^*\tau\subset s\Leftrightarrow X$ 是离散的，且存在 $\varepsilon>0$ 使 $\rho(x,y)\geqslant\varepsilon$，$\forall x,y\in X$，$x\neq y$；

(2) $s\subset\Leftrightarrow{}^*X$ 是全有界的；

(3) $s={}^*\tau\Leftrightarrow X$ 是有限集。

证明　(1) 必要性：$s\subset{}^*\tau\Leftrightarrow$ 是离散空间，因为若不然，则必有 $x\in X$，使 $X\backslash\{x_0\}$ 为 X 的开的非闭集。于是，存在点列 $\{x_n\}\subset X\backslash\{x_0\}$ 使 $\rho(x_n,x_0)<\dfrac{1}{n}$。从而有 ${}^*X\backslash\{x_0\}={}^*(X\backslash\{x_0\})$ 不为 s—开集。事实上，$\forall\nu\in{}^*N\backslash N$，$x_\nu\in{}^*X\backslash\{x_0\}$，但 $\forall\varepsilon>0$，$\varepsilon\in R_+$，$x_0\in\{y|{}^*\rho(y,x_\nu)<\varepsilon\}$，故 ${}^*X\backslash\{x_0\}$ 不为 s—开集。这与假设 ${}^*\tau\subset S$ 矛盾。于是 X 是离散空间。

下面证明：存在 $\varepsilon>0$ 使 $x,y\in X$，$x\neq y$ 时，$\rho(x,y)\geqslant\varepsilon$。若不然，则可找 X 的点列 $\{x_n\}$ 及 $\{y_n\}$，使 $\rho(x_n,y_n)<\dfrac{1}{n}$，$x_n\neq y_n$。不妨设 $\rho(x_n,y_n)\downarrow$，有 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 均为无穷子集。

事实上，若$\{x_n\}$有限，则必有$\{y_n\}$的子列y_{n_k}及x_{n_0}使$\rho(x_{n_0},y_{n_k})\downarrow 0$。这与$x_{n_0}$为孤立点矛盾。于是，不妨设$\{x_n\}$为两两不同的序列。$\forall n\in N$，令$\varepsilon_n=\inf\limits_{k>n}\rho(x_k,x_n)$，由$X$的离散性及$\{x_n\}$两两不同知，$\varepsilon_n>0$。设$\varepsilon=\inf\limits_n\varepsilon_n$，有$\varepsilon>0$；若不然，不妨设$\varepsilon_n\to 0$，于是，可找$\{x_n\}$的子列$\{x_{n_k}\}$使

$$\rho(x_{n_k},x_{n_{k+1}})<2\varepsilon_{x_k}\to 0\quad(k\to\infty)$$

令$G=\{x_{n_{2k}}: k=1,2,\cdots\}$，则$^*G$是$^*\tau$开集，从而$^*G$是$s$—开集。但很明显，$\forall\nu\in {}^*N\backslash N$，$x_{n_{2\nu}}\in {}^*G$，$x_{n_{2\nu+1}}\notin {}^*G$，而$^*\rho(x_{n_{2\nu}},x_{n_{2\nu+1}})\simeq 0$，这与$^*G$是$s$—开集矛盾，故$\varepsilon>0$。于是$\forall k$，$m$，$k\neq m$，$k,m\in N$，$\rho(x_k,x_m)\geqslant\varepsilon>0$。由转换原理知，$^*\rho(x_k,x_m)\geqslant\varepsilon>0$，$k,m\in {}^*N$。又注意到，$\forall\nu\in {}^*N\backslash N$，$^*\rho(x_\nu,y_\nu)\simeq 0$。令$A=\{x_n: n\in {}^*N\}$为$s$—开集，故$\nu\in {}^*N\backslash N$，$y_\nu\in A$。由下串原理，存在$k_0\in N$使$k\geqslant k_0$时，$y_k\in A$，即$\{y_k: k\geqslant k_0, k\in {}^*N\}\subset A$。故对$k\geqslant k_0$，必可找$m_k$使$y_k=x_{m_k}$。因$x_k\neq y_k$，所以$m_k\neq k$，于是$\rho(x_k,y_k)=\rho(x_k,x_{m_k})\geqslant\varepsilon$。这与$\rho(x_k,y_k)<\frac{1}{k}$矛盾。必要性得证。充分性是显然的。

（2）若X是全有界的，证明$s\subset {}^*\tau$。设A为s—开集，则$\forall x_0\in A$，存在$\varepsilon>0(\varepsilon\in R_+)$使$\{y\,|\,{}^*\rho(y,x_0)<\varepsilon\}\subset A$。注意到$X$是全有界的，故对此$\varepsilon>0$，可找有限集$F=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$使$s(F,\varepsilon/4)\equiv\bigcup\limits_{i=1}^{n}\{x\,|\,\rho(x,x_i)<\varepsilon/4\}\supset X$。故$^*X=\bigcup\limits_{i=1}^{n}{}^*G_i$。这里$G_i=\{x\,|\,\rho(x,x_i)<\varepsilon/4\}$。又$x_0\in {}^*X$，故存在$i$使$x_0\in {}^*G_i$。若$x\in {}^*G_i$，则$^*\rho(x,x_0)\leqslant {}^*\rho(x,x_i)+{}^*\rho(x_i,x_0)<\varepsilon$，故$x\in A$，从而$^*G_i\subset A$。于是证明了$A$是$^*\tau$开集。反之，若$s\subset {}^*\tau$，则$\forall\in {}^*X$，$x$是预近标准点，亦即$\forall\varepsilon>0$，$\exists y\in X$，s·t $^*\rho(x,y)<\varepsilon$。这是因为$\{y\,|\,{}^*\rho(y,x)<\varepsilon\}$为$x$的$s$—邻域，从而也为$x$的$^*\tau$邻域，于是必含标准点之故。由此，$X$是全有界的。

（3）由（1）及（2），$^*\tau=s\Leftrightarrow X$为离散的全有界集，且$x\neq y$，$\rho(x,y)\geqslant\varepsilon$，从而只能是有限集。

2　$^*X$中的商拓扑

设X为一拓扑空间，称紧空间Y为X的一个紧扩张。如果存在映射f：$X\to Y$，使f为X到$f(X)$的一个同胚，而且$f(X)$在Y中稠，则称X的紧扩张(f,Y)为Hausdorff紧扩张(如果Y是Hausdorff的)。众所周知，任意拓扑空间均有紧扩张。对于X的紧扩张全体，定义偏序$(f,Y)\geqslant(g,Z)$，当且仅当存在从Y到Z的连续函数h使$h\circ f=g$。等价地，有$(f,Y)\geqslant(g,Z)$，当且仅当$f(X)$到Z的连续函数$g\circ f^{-1}$有映Y到Z的连续扩张h。若h为同胚，则称(f,Y)与(g,Z)拓扑等价。不难证明[2]，X的所有紧扩张人体在上述偏序的定义及把拓扑等价认为恒同的意义下是一个偏序集。本文关心的是，拓扑空间在上述偏序定义下是否有最大紧扩张。Stone-Cěch定理[2]告知，对于Tychonoff空间，这种紧扩张是存在的。下面揭示$^*X$中的商拓扑和这种紧扩张的关系。

设X为拓扑空间，$M_b(X)$为X上的有界实函数全体，$C_b(X)$为X上的有界连续函数全体。利用$M_b(X)$及$C_b(X)$对$^*X$进行一个分划：设$x,y\in {}^*X$，定义$x\sim_{M_b}y\Leftrightarrow {}^*f(x)\simeq {}^*f(y)$，$\forall f\in M_b(X)$；$x\sim_{C_b}y\Leftrightarrow {}^*f(x)\simeq {}^*f(y)$，$\forall f\in C_b(X)$。不难验证，$\sim_{M_b}$及$\sim_{C_b}$均为$^*X$上的等价关系。设$\pi$为$^*X$上的拓扑，$\sim$为$^*X$上的等价关系，则定义商空间$^*X/\sim$上

的拓扑 $\hat{\pi}=\pi/\sim$ 为使投影 $P:x\to\hat{x}$ 连续的最大拓扑，亦即 $^*X/\sim$ 中的所有使 $P^{-1}(G)\in\pi$ 的集 G 为 $^*X/\sim$ 中之开集。称 $\hat{\pi}$ 为 $^*X$ 上的拓扑 π 关于等价关系 $\sim$ 的商拓扑。显然，$P:x\to\hat{x}$ 是连续的开映射。

定理 3 若 (X,τ) 为 Tychonoff 空间，则

$(^*X/\sim_{C_b},\ ^*\hat{\tau})$ 为 X 的最大的 Hausdorff 紧扩张。

证明 先证 $(^*X/\sim_{C_b},{}^*\hat{\tau})$ 是 Hausdorff 的。设 $\hat{x}\neq\hat{y}$

则可找 $f\in C_b(X)$ 使 $^\circ(^*f(x))\neq{}^\circ(^*f(y))$。记 $a={}^\circ(^*f(x)$，$b={}^\circ(^*f(y))$，$|a-b|=\varepsilon>0$，令

$$U=\{z|z\in X,\ |f(z)-a|<\varepsilon/4\}$$
$$V=\{z|z\in X,\ |f(z)-b|<\varepsilon/4\}$$

则 U，V 均为 X 的开子集，且 $U\cap V=\phi$。由转换原理 $^*U\cap{}^*V=\phi$。令 $G_1=P(^*U)$，$G_2=P(^*V)$，显然 G_1 及 G_2 分别为 $\hat{x}$ 及 $\hat{y}$ 的开邻域，且 $G_1\cap G_2=\phi$，从而证明了 $^*\hat{\tau}$ 是 Hausdorff 的。其次由 $(^*X,{}^*\tau)$ 紧知 $(^*X/\sim_{C_b},{}^*\hat{\tau})$ 紧。

设 $f:X\to{}^*X/\sim_{C_b}$ $f(x)\triangleq\hat{x}$。由于 X 是 Tychoncff 空间，$x,y\in X$，$x\neq y\Rightarrow\hat{x}\neq\hat{y}$，故 f 是一对一的。往证 f 为 X 到 $f(X)$ 的同胚。由定理 1 知，$^*\tau|_X=\tau$，且嵌入映射 J：$X\to{}^*X$ 是 X 到 $J(X)$ 的同胚，而 $f=P\circ J$，故 f 连续。又设 $G\subset X$ 为 x 的任一开邻域，取连续函数 g：$X\to[0,1]$ 使 $g(x)=0$，$g(X\backslash G)=1$。令 $W=\{y|g(y)<1/2\}$，则 $f(G)\supset P(^*W)\cap f(X)$，故 f 为开映射。从而 f 为 X 到 $f(X)$ 的同胚。而 $f(X)$ 在 $^*X/\sim_{C_b}$ 中的稠性是显然的。这是因为 $^*X$ 的任一非空的 $^*\tau$ 邻域均含有 X 中的点之故。于是，证明了 $(^*X/\sim_{C_b},{}^*\hat{\tau})$ 为 X 的一个 Hausorff 紧扩张。其最大性证明如下：设 (g,Y) 是 X 的任一 Hausdorff 紧扩张，因 g：$X\to Y$，由转换原理，$^*g$：$^*X\to{}^*Y$。注意到 Y 为紧的 Hausdorff 空间，故 $\forall y\in{}^*Y$，y 为近标准点。于是可作映射 h：$^*X/\sim_{C_b}\to Y$。

$h(\hat{x})\triangleq{}^\circ(^*g(x))$，这里 $^\circ(^*g(x))$ 为 $^*g(x)$ 的近标准部分。h 为 $^*X/\sim_{C_b}$ 到 Y 的连续映射。事实上，若 $x\sim_{C_b}y$，则必有 $^\circ(^*g(x))={}^\circ(^*g(y))$；若不然，设 $y_1={}^\circ(^*g(x))$，$y_2={}^\circ(^*g(y))$，$y_1\neq y_2$，由于 Y 是紧的 Hausdorff 空间，故存在连续函数 l：$Y\to[0,1]$ 使 $l(y_1)=0$，$l(y_2)=1$。令 $g_1=l\circ g$，则 $g_1\in C_b(X)$，但

$$^*g_1(x)={}^*l\circ{}^*g(x)\simeq{}^*l(y_l)=l(y_1)=0$$
$$^*g_1(y)={}^*l\circ{}^*g(y)\simeq{}^*l(y_2)=l(y_2)=1$$

这与 $x\sim_{C_b}y$ 矛盾，故 h 是有意义的。其次，证明 h 的连续性：$\forall x\in{}^*X$，设 G' 为 $h(\hat{x})$ 的开邻域，取 $h(\hat{x})$ 的开邻域 G 使 $\overline{G}\subset G'$，注意到 g 为 X 到 $g(X)$ 的同胚，可找 X 的开集 G_1 使 $g(G_1)=G\cap g(X)$，于是 $^*g(^*G_1)={}^*G\cap{}^*g(^*X)$。因 $G\supset{}^\circ(^*g(x))$ 且 G 为开集，故 $^*g(x)\in{}^*G$，于是，$^*g(x)\in{}^*G\cap{}^*g(^*X)$。由 $^*g$ 是单射知 $x\in{}^*G_1$，于是 $P(^*G_1)$ 为 $\hat{x}$ 的开邻域，且 $h\circ P(^*G_1)={}^\circ(^*G)\subset\overline{G}\subset G'$。故 h 连续。而 $g=h\circ f$，从而证明了 $(^*X/\sim_{C_b},{}^*\hat{\tau})$ 的最大性。

定理 4 若 X 是 T_1 空间，则 $(^*X/\sim_{M_b},\hat{\mathscr{F}}_\tau)$ 为离散空间 X 的 Stone-Cèch 紧扩张。

证明 对于离散空间 $M_b=C_b$，由定理(1)及定理 3 立即得证。

如果 X 为距离空间，ρ 为 X 上的度量，则在 $^*X$ 上定义等价关系 $\sim_s$，$x\sim_s\Leftrightarrow{}^*\rho(x,y)$

$\simeq 0$。不难证明$({}^*X/\sim_s,\hat{s})$为完备度量空间，但$({}^*X/\sim_s,\hat{s})$一般不为 X 的完备化空间。

定理 5 若 X 是全有界的距离空间，则$({}^*X/\sim_s,\hat{s})$为 X 的紧扩张。

证明 由定理 2 知，$s\subset {}^*\tau$，故${}^*X$ 关于 s—拓扑是紧的，从而$({}^*X/\sim_{C_s},\hat{s})$为紧空间。由于任一 s—邻域中含有 X 中的点，故 X 在$({}^*X/\sim s,\hat{s})$中稠。

参 考 文 献

1 Luxembury W A J. A General theory of monads, in Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability. W A J Luxembury (ed.) Holt, Rinchart and Winston (New York), 1969: 18—86

2 Kelly J L. General Topology. Van Nostrand, 1995

3 冯汉桥（译）. 应用非标准分析. 西安：陕西师范大学出版社

4 Robinson A. Nonstandard Analysis. Norty-Holland, Amsterdam, 1974

（责任编辑　潘　生）

（上接第 146 页）

$$\rightarrow A^{(2)}=\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & -1.11 & 2.85 \\ * & * & * & 0.05 \end{bmatrix}$$

由此得 $a_{kk}^{(2)}=-1.11<0$。由算法步（5）及注 1 知 A 为不定矩阵。

例 4 对于 n 阶实对称矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，其中

$$a_{ij}=i(n-i+1)(n-j+1),\ i\leqslant j.$$

用 Cholesky 分解法可知 $A>0$。今对不同的 n，在 486 微机上用本文算法（用 FORTRAN 语言编程）判得 A 为正定矩阵。运行时间见表 1。

表 1 运算时间

n	50	100	200	250	300	400	500
秒	0.5	2.0	2.9	4.1	7.8	22.8	54.9

致谢：蒋增荣教授对本文提出了诚恳的意见，在此表示感谢。

参 考 文 献

1 张远达. 线性代数原理. 上海教育出版社，1980

2 李庆扬等编. 数值分析. 华中理工大学出版社，1989

3 谢如彪，姜培庆. 非线性数值分析. 上海交通大学出版社，1984

（责任编辑　卢天贶）