

## 应用分解法分析二阶锁相环路\*

罗 晖 张广发

(国防科技大学应用物理系 长沙 410073)

**摘 要** 本文介绍了一种新的非线性分析方法——分解法,并通过引入数学机械化的方法,将其应用于非理想二阶锁相环路的分析,推导了捕捉过程中相位差、频率差的逼近解析解,分析了环路的稳定性,得到了环路稳态相差、稳态频差和捕捉时间等参数。

**关键词** 非线性分析,分解法,数学机械化,锁相环

**分类号** TN911.91

## Application of Decomposition Methods to the Analysis of Second-Order Phase-Locked Loops

Luo Hui Zhang Guang fa

(Department of Applied Physics, NUDT, Changsha, 410073)

**Abstract** In the paper, a novel method of nonlinear analysis —— Decomposition method is introduced. Depending on Mathematical Mechanization, it is used to analyze the second-order Phase-locked loops (PLL) with imperfect integrator, and the approximate analytic solution of phase error and frequency error are worked out. The stability is analyzed and the steady-state phase error, frequency error and pull-in time are obtained.

**Key words** nonlinear analysis, decomposition method, mathematical mechanization, phase-locked loops

非线性是自然界和工程中最普遍的现象。传统的分析方法包括定量分析方法(如描述函数法、摄动方法等)和定性分析方法(如李雅普诺夫方法等)<sup>[1]</sup>。这些方法,或者是在一定的附加条件下采用各种近似手段,或者需要很强的技巧性,对于强非线性行为就显得力不从心。因此,人们开始研究用数值模拟的方法来分析非线性行为,并取得了一定的成就。但是,数值模拟方法得到的只是一些离散的数据,不便于定量地对系统进行

\* 1996年2月27日收稿

分析和寻求一些规律性的结论，而且数值方法需要大量的计算机时间，费用大，有时计算结果也并非令人满意。所以，虽然数值方法取得了很大的发展，人们仍一直在寻求一种较好的逼近解析法来完成对系统动态特征的分析。

近些年来发展起来的分解法<sup>[2-3]</sup>在研究非线性问题中已显示了很大的优越性。该方法不需要做任何近似处理，且比数值模拟方法具有更高的精度和更快的收敛性<sup>[4]</sup>。

本文以非理想二阶锁相环路为例，具体说明了分解法的原理及其数学机械化实现，并通过对所得到的结果进行分析可知：由于分解法在不需要任何近似的条件下直接求出非线性微分方程的任意高精度的逼近解析解，因此可以实现对非线性控制系统的分析。

### 1 非理想二阶锁相环路模型的建立<sup>[5]</sup>

如图 1，锁相环 (PLL) 是由鉴相器 (PD)、环路滤波器 (LF)，压控振荡器 (VCO) 组成的相位反馈系统。由各部份的性质，我们可以得到环路的相位模型，如图 2。其中  $\theta_1(t)$ 、 $\theta_2(t)$  是以  $\omega_0 t$  为参考的输入、输出相位， $\omega_0$  是 VCO 的自由振荡频率；KH 为线性化的环路高频总增益，单位为 1/s； $s$  代表微分算子。

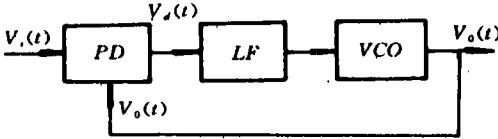


图 1 PLL 的方框图

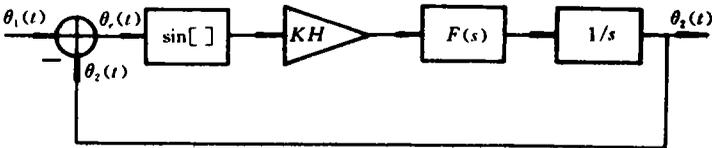


图 2 PLL 的相位模型

由相位模型不难推导出环路的基本方程：

$$s\theta_e(t) + KH \cdot F(s) \cdot \sin\theta_e(t) = s\theta_1(t) \quad (1)$$

对于非理想二阶环，环路采用如图 3 的无源比例积分滤波器，其传递函数为：

$$F(s) = \frac{s + 1/\tau_2}{s + (1/\tau_1 + 1/\tau_2)} \quad (2)$$

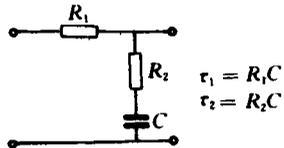


图 3 无源比例积分滤波器

令：  $\alpha = 1/\tau_2$                        $\beta = 1/(\tau_1 + \tau_2)$                       (3)

则  $F(s) = \frac{s + \alpha}{s + \beta}$                       (4)

对于固定频率输入： $\theta_1(t) = \Delta\omega_0 t + \theta_i$                       (5)

其中  $\Delta\omega_0$  为固有频差,  $\theta_0$  为固有相差。则有:

$$\frac{d\theta_1(t)}{dt} = \Delta\omega_0 \quad \frac{d^2\theta_1(t)}{dt^2} = 0 \quad (6)$$

将式(4)和(6)代入式(1)可得固定频率输入时非理想二阶环的基本方程:

$$\frac{d^2\theta_c}{dt^2} + (\beta + KH \cdot \cos\theta_c) \cdot \frac{d\theta_c}{dt} + \alpha \cdot KH \cdot \sin\theta_c = \beta\Delta\omega_0 \quad (7)$$

为了对式(7)进行分析, 首先将其无量纲化, 即引入无量纲时间  $\tau = KH \cdot t$ , 且令:

$$\alpha' = \alpha/KH \quad \beta' = \beta/KH$$

可得无量纲化后的环路方程:

$$\frac{d^2\theta_c}{d\tau^2} + \beta' \frac{d\theta_c}{d\tau} + \cos\theta_c \frac{d\theta_c}{d\tau} + \alpha' \sin\theta_c = \frac{\beta' \Delta\omega_0}{KH} \quad (8)$$

## 2 二阶非理想锁相环模型的分析

现在, 用分解法来求解二阶非理想锁相环的状态方程式(8):

首先, 作变量代换, 令  $x = \theta_c$ ,  $y = \frac{d\theta_c}{d\tau}$ , 则  $x$ 、 $y$  分别为相位差和频率差, 于是状态方程(8)化为一阶微分方程组:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = y \\ \frac{dy}{d\tau} = \frac{\beta' \Delta\omega_0}{KH} - \beta' \cdot y - \cos x \cdot y - \alpha' \sin x \end{cases} \quad (9)$$

令算符  $L = \frac{d}{d\tau}$ , 则  $L^{-1} = \int_0^\tau d\tau$ , 并将待求函数  $x$ 、 $y$  和非线性函数分解:

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n x_n \quad y = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n y_n \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_n \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n B_n \quad (10)$$

其中  $\lambda$  是为了分组方便而引入的参数, 不一定是微小量, 取  $\lambda=1$ 。这与摄动方法有本质的不同。 $A_n$ 、 $B_n$  是非线性函数  $\sin x$ 、 $\cos x$  所对应的 Adomian 多项式<sup>[3]</sup>。对于一般的非线性函数  $f(u) = f[u(\lambda)]$ , 其中  $u = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n$ , 其对应的 Adomian 多项式  $c_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} f[u(\lambda)]$  | $_{\lambda=0}$ , 于是由式(10)可求得  $A_n$ 、 $B_n$  为

$$\begin{aligned} A_0 &= \sin x_0 & B_0 &= \cos x_0 \\ A_1 &= x_1 \cos x_0 & B_1 &= -x_1 \sin x_0 \\ A_2 &= x_2 \cos x_0 - \frac{1}{2!} x_1^2 \sin x_0 & B_2 &= -x_2 \sin x_0 - \frac{1}{2!} x_1^2 \cos x_0 \\ &\dots\dots & &\dots\dots \end{aligned}$$

将式(10)代入式(9)并参数化得

$$\begin{cases} L \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n x_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n y_n \\ L \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n y_n = \frac{\beta' \Delta\omega_0}{KH} - \lambda \cdot \beta' \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n y_n - \lambda \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n B_n \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n y_n \right) - \lambda \cdot \alpha' \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_n \end{cases} \quad (11)$$

两边取  $L^{-1}$ , 则式(11)化为:

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n x_n = x(0) + \lambda L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n y_n \\ \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n y_n = y(0) + L^{-1} \frac{\beta' \Delta \omega_0}{KH} - \lambda L^{-1} \beta' \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n y_n - \lambda L^{-1} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n B_n \right) \\ \quad \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n y_n \right) - \lambda L^{-1} \alpha' \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_n \end{cases} \quad (12)$$

其中  $x(0)$ 、 $y(0)$  为初始相差和初始频差。

令  $\lambda$  幕次相同的项相等, 则可求得相差和频差的各阶解的分量:

$$\begin{cases} x_0 = x(0) \\ y_0 = y(0) + L^{-1} \frac{\beta' \Delta \omega_0}{KH} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = L^{-1} y_0 \\ y_1 = -\beta' L^{-1} y_0 - L^{-1} (B_0 \cdot y_0) - \alpha' L^{-1} A_0 \end{cases} \\ \dots\dots\dots \\ \begin{cases} x_n = L^{-1} y_{n-1} \\ y_n = -\beta' L^{-1} y_{n-1} - \beta' \cdot L^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} (B_i \cdot y_{n-1-i}) - \alpha' \cdot L^{-1} A_{n-1} \end{cases} \end{cases} \quad (13)$$

求解式(13)可得相位差和频率差的  $n$  阶逼近解析解:

$$\hat{x} = \sum_{i=0}^n x_i \quad \hat{y} = \sum_{i=0}^n y_i \quad (14)$$

Cherrault 等人已证明<sup>[6]</sup>, 只要  $n$  足够大,  $\hat{y} - y \rightarrow 0$ ,  $\hat{x} - x \rightarrow 0$ , 即分解法是收敛的。

从以上的求解过程可以看到: 用分解法求解非线性方程并不需要做任何近似, 且随着阶数  $n$  的增大可以得到任意高精度的逼近解析解。这是以往的非线性分析方法所不具有的优越性, 而且它比伏特拉 (volterra) 函数近似法简单、实用, 适合于机器推演, 易于达到所要求的高精度。其符号推演的具体步骤为:

(1) 利用式(10)推导非线性函数  $\sin x$ 、 $\cos x$  对应的 Adomian 多项式。

(2) 由式(13)及给定的初始相差  $x(0)$  和初始频差  $y(0)$  求解逼近解析解的各阶分量  $x_n$ 、 $y_n$ ,  $n=0, 1, 2, \dots$ 。

(3) 由式(14)求得相差、频差所对应的逼近解析解  $\hat{x}$ 、 $\hat{y}$ 。

(4) 为了求得环路任意长时间的行为, 我们对逼近解析解  $\hat{x}$ 、 $\hat{y}$  进行迭代分析, 即从  $x(0)$ 、 $y(0)$  开始, 以  $\Delta \tau$  为步长, 求得  $\hat{x}(\Delta \tau)$ 、 $\hat{y}(\Delta \tau)$ 。并以此为初始值继续迭代, 直到所需要的时间长度。

我们对参数为  $\alpha' = 1/2$ ,  $\beta' = 1/10$  的非理想二阶环进行了分析, 其中步长为  $1/40$ , 取 5 阶逼近解析解。求得结果如下: 初始参数为:  $x(0) = -\pi$ ,  $y(0) = 0.07071$ ,  $\omega_0/KH = 3$ 。

5, 如图 4; 初始参数为  $x(0) = -\pi$ ,  $y(0) = 0.707$ ,  $\frac{\omega_0}{KH} = 3.5$ , 如图 5。

由图可知:

(1) 分解法通过求得相位差和频率差的逼近解析解, 完整地描述了捕捉过程中相差和频差的变化。这使得人们对锁相环的工作过程有了更清晰、更细致的了解。

(2) 对于同样的系统参数, 起始频差  $y(0)$  为 0.707 和 0.07071, 则分别产生不同的系

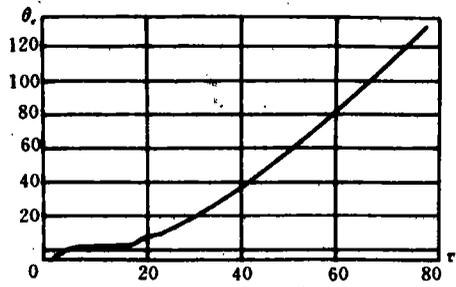
统响应。当  $y(0)=0.707$  时，环路锁定，而  $y(0)=0.7071$  时，环路不能锁定。这说明，分解法具有很高的精度，即使是初始状态变化  $0.0001$  所带来的影响仍可准确地描述。

(3) 由于在不进行任何近似的条件下已得到了环路相位差、频率差的高精度逼近解析解，因此我们能精确地得到环路的捕捉时间： $\tau_c = 25.15$ ，( $y(0)=0.707$ )。该捕捉时间包括了频率捕捉时间和相位捕捉时间。这较描述函数法仅能给出频率捕捉时间更精确。

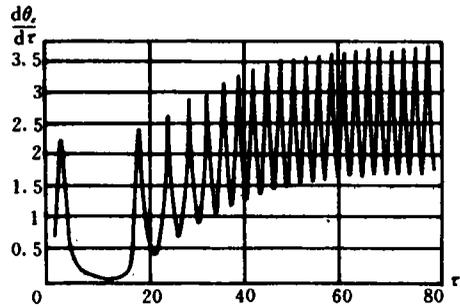
(4) 当  $y(0)=0.707$  时，环路稳定后稳态相差  $\theta_\infty = 2\pi + 0.778169$ 。这说明非理想二阶环对固定频率输入有稳态相差，而稳态频差也不严格为  $0$ ，只是在  $0$  附近以较小的振幅来回波动。当  $y(0)=0.7071$  时，随着时间的增长频差趋向于稳定的振荡，对应于稳定的极限圈，相差将不断增长。这说明此时环路稳定在差拍状态，不能锁定。

### 3 结 论

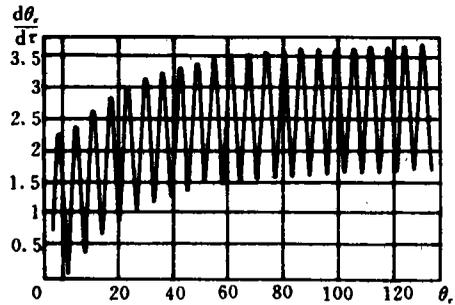
以上我们用分解法详细分析了非理想二阶环的捕捉过程，得到了环路的稳定性、响应过程、稳态性能等特性。从分析过程可知，分解法能在不进行任何近似的条件下实现对非线性锁相控制系统更细致、更精确的分析。这是以往的分析方法所不具有的，也是非线性控制系统分析所需要的。另外，数学机械化方法的引入使分解法完全走向实用化，因此从这个意义上讲，用分解法来实现非线性控制系统的分析是大有作为的。



(a) 捕捉过程中相位差变化

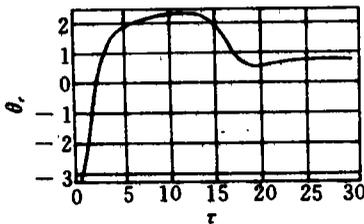


(b) 捕捉过程中频率差变化

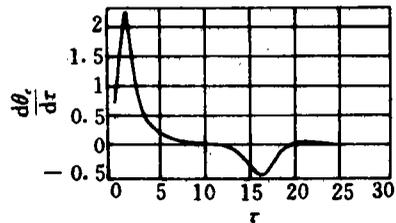


(c) 相轨迹图

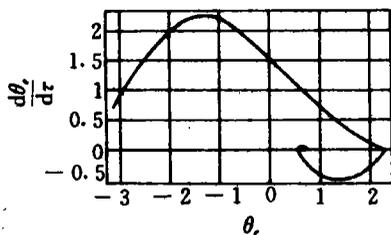
图 4



(a) 捕捉过程中相位差变化



(b) 捕捉过程中频率差变化



(c) 相轨迹图

图 5

当然,该分解法作为一种新兴的数学方法,在理论和技巧上仍有许多值得探索的地方。但是,正如美国著名科学家 R. Bellman 所言<sup>[3]</sup>,分解法是科学上的一个突破性进展,其重要性迄今尚难以估量。

### 参 考 文 献

- 1 高为炳. 非线性控制系统导论. 北京: 科学出版社 1988
- 2 Adomian G. Stochastic Systems. New York: Academic Press 1983
- 3 Adomian G. Nonlinear Stochastic Operator Equations. New York: Academic Press, 1986
- 4 方锦清, 姚伟光. 逆算符方法求解非线性动力学方程及其一些应用实例. 物理学报, 1993, 142(9): p1375~1384
- 5 郑继禹, 万心平, 张厥盛. 锁相环路原理与应用(修订本). 北京: 人民邮电出版社, 1984
- 6 Cherrault Y, Adomian G. Decomposition Methods; A New Proof of Convergence. Mathematical and Computer Modelling, 1994. 18(12): 103~106

(责任编辑 潘 生)