国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第18卷第4期 1996年12月 Vol. 18 No. 4

利用验前信息时，飞行器试验鉴定技术研究——一次现场试验下的精度鉴定方法*

张金槐

(国防科技大学自动控制系 长沙 410073)

摘 要 研究了具有验前信息下的飞行器落点精度的鉴定问题，适用于只作一次现场飞行试验的情况。文中给出了鉴定方案，并进行了风险计算和信度分析。对于一次试验结果与验前信息的一致性，给出了验证方法，本文所提供的理论方法，可用于一般武器装备系统的试验定型和鉴定。

关键词 Bayes统计推断，射击精度，统计决策

分类号 V417.7

Research on Detecting Technique of Vehicle with Prior Information —— An Accuracy Detecting Method under the Circumstance of Only One Flight Test

Zhang Jinhuai

(Department of Automatic Control, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract This paper discusses the detecting problem of the fall point of vehicle with prior information. This proposed method may be used under the circumstance of only one flight test. In the paper, the detecting scheme is discussed, and the risk function is calculated. In the meantime, the fiducial analysis is introduced. Finally, the consistent test of prior sample and fall point of one flight test are studied.

Key words Bayesian statistical inference, attacking accuracy, statistical decision

目前，飞行器试验鉴定技术中，一个特别受到关注的问题是通过现场试验前的大量

* 1996年5月6日收稿

仿真信息及有关先验知识，缩小现场试验次数，以便制定出更适合试验场地需要的精度评估和鉴定方案。一些技术部门提出了一次定型发射之下的精度鉴定问题，甚至提出不进行现场试验，如何进行武器装备系统的精度分析问题。这些都是具有现实意义的、且具有挑战性的课题。需要我们认真对待和研究。

众所周知，小子样，甚至是特小子样下的飞行器试验鉴定技术，国内的研究可追溯到六十年代初期。从运用的方法来说，经历了由 A. Wald 的序贯检验、截尾序贯检验至 Bayes 检验、Bayes 序贯检验、截尾序贯验后加权检验及 Bayes 决策等的技术途径[1]。然而，要使子样容量缩减至 1 或 0 子样，这还是一个新问题。本文将研究具有验前信息的一次现场试验之下的精度鉴定问题。

1　一次试验之下，关于落点射击精度的评论

仅仅依赖于一次试验结果要对落点精度进行评定，只能是验证性的。经典的方法是按落点区作圆，原心 o 为瞄准点，圆的半径按导弹的设计精度确定。记此圆域为 C_r：$x^2+z^2\leqslant r_2$。于是

$$P\{(x,z)\in C_r\}=1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\frac{r}{\sigma})^2} \tag{1}$$

其中 σ 为导弹落点的标准偏差（这里假定 $\sigma_x=\sigma_z=\sigma$，因此落点具有圆散布）。如果上述概率为 1/2，则 $r=CEP=1.18\sigma$，即圆的半径为圆概率偏差。按常规，取 $r=3.5CEP$，记作 r^*，此时由(1)式算得 $P=P^*\approx 99.9\%$，如果作一次试验，导弹落入 C_{r^*} 内，则认为该发弹是合格的。用这种方法作为试验后的精度鉴定，显然是太粗糙了，而且，如果落点具有系统性偏差，那末计算公式将不是 (1)，而应改为

$$P=\mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2}}\int_0^K\rho\mathrm{e}^{-\frac{\rho^2}{2}}I_0(A\rho)\mathrm{d}\rho$$

$$\text{记作 } P(K,A) \tag{2}$$

式中　$K=r/\sigma$，$A^2=\frac{1}{\sigma^2}\ (\mu_x+\mu_z)^2=\frac{r_0^2}{\sigma^2}$，即 $A=r_0/\sigma$，$r_0=\sqrt{\mu_x^2+\mu_z^2}$为落点散布中心离开 o 点的距离。目前，当落点具有系统误差时，命中 C_r 圆的概率将会降低。(2) 中 P 的计算参见 [3]。

上面这种评论精度的方法仅依靠一次试验结果，因此作评论时将冒较大的风险，例如采伪的概率将放大，为此必须运用验前信息，且构造出更严密的落点精度鉴定方法。

1.1　Bayes 检验方法

设现场试验前已经有了验前信息，记 $X^{(0)}=(X_1^{(0)},\cdots,X_{n_0}^{(0)})$为由验前信息表示的子样。在一次试验之后，得样品 X，现要在检验下列统计假设

$$H_0:\sigma=\sigma_0\leftrightarrow H_1:\sigma=\lambda\sigma_0,\ \text{记作 } \sigma_1,\lambda>1$$

记(x,z)为落点离开瞄准点的落点偏差位置。令

$$r=\sqrt{x^2+z^2}$$

则 r 是落点离开瞄准点的距离，它具有 Rayleigh 分布，其概率密度函数为 $p(r)=\frac{1}{\sigma^2}re^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$，$r\geqslant 0$，我们以 r 作为样品随机变量。在一次试验之后，获得了 r。由 Bayes 方法，只需

比较 $P(H_0/r)$和 $P(H_1/r)$。对于互相竞择的假设 H_0,H_1 来说,$P(H_1/r)=1-P(H_0/r)$。因此,只要计算 $P(H_0/r)$。如果 $P(H_0/r)>1/2$,则采纳 H_0,即认为落点的 σ 是可以接受的;否则,拒绝 H_0.

注意到 Bayes 公式

$$P(H_0/r)=\frac{P(r/H_0)P(H_0)}{P(r/H_0)P(H_0)+P(r/H_1)P(H_1)}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{P(r/H_1)}{P(r/H_0)}\cdot\frac{P(H_1)}{P(H_0)}} \tag{3}$$

因此,只要$\frac{P(r/H_1)P(H_1)}{P(r/H_0)P(H_0)}<1$,则采纳 H_0。式中 $P(H_0)$由验前信息计算出来,而 $P(H_1)=1-P(H_0)$。此外

$$P(r/H_i)=\frac{1}{\sigma_i^2}re^{-\frac{r^2}{2\sigma_i^2}},\quad i=0,1$$

于是,经过计算,可知当

$$r^2<\frac{2\sigma_0^2\lambda^2}{\lambda^2-1}\log\left[\lambda^2\frac{P(H_0)}{P(H_1)}\right] \tag{4}$$

时采纳 H_0,否则采纳 H_1。

记 $$R^2=R^2(\lambda,P(H_0))=\frac{2\sigma_0^2\lambda^2}{\lambda^2-1}\log\left[\lambda^2\frac{P(H_0)}{P(H_1)}\right] \tag{5}$$

因此,在一次试验之后所得到的落点离开瞄准点的距离 $r<R$ 时采纳 H_0。也就是说落点只要落在以瞄准点 o 为心,R 为半径的圆 C_R 内,则认为 H_0 是可接受的。

此时,检验中犯弃真和采伪的概率 α 和 β 分别为

$$\alpha=P(\text{一次发射中,落点位于 } C_R \text{ 之外 }/H_0\}$$

$$=P\{r>C_R/\sigma_0\}=1-P\{r\leqslant C_R/\sigma_0\}$$

$$=1-\frac{1}{\sigma^2}\int_0^R re^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}}dr=e^{-\frac{1}{2}(\frac{R}{\sigma_0})^2} \tag{6}$$

同理

$$\beta=1-e^{-\frac{1}{2}(\frac{R}{\sigma_1})^2} \tag{7}$$

利用(4)式作假设检验,且 α,β 为(6)、(7)。这种检验就是 Bayes 检验方法。它较之在落点区画一个 3.5CEP 的圆的方法要科学。Bayes 方案运用了验前信息,它表现在决策不等式(4)中出现了 $P(H_0)$,$P(H_1)$,而且可知,如果验前信息很充分,能使 $P(H_0)$比较大,那末由(5)式,这时容易采纳 H_0。如果 $P(H_0)=P(H_1)$,且取适当的检出比 λ,使 $R(\lambda,P(H_0))=R(\lambda.1/2)=3.5CEP$,那末 Bayes 方案退化为经典的 3.5$CEP$ 画圆方案。$P(H_0)$的计算,已有专门的研究,限于篇幅,请参见[2]。

1.2 Bayes 决策方法

运用决策理论作落点精度鉴定时,需引入损失函数,然后确定最优决策,使验后期望损为最小。对于互相竞择的假设 H_0:$\sigma=\sigma_0\leftrightarrow H_1$:$\sigma=\lambda\sigma_0$,记作 σ_1,此时可能运用的决

策是采纳 H_0 的决策和采纳 H_1 的决策。记 a_i 为采纳 H_i ($i=0$, 1) 的决策。定义损失函数

$$L(\theta,a_i)=\begin{cases}0, & 当\ \sigma=\sigma_i,\\ K_i, 当\ \sigma=\sigma_j, j\neq i, i,j=0,1\end{cases} \tag{8}$$

对于落点精度鉴定问题，这种常值损失函数可由武器系统的使用效果来定义（参见[1]）。于是，采用决策 a_0，a_1 时的验后期望损失，分别为 $K_0P(H_1/X)$，$K_1P(H_0/X)$，这里 X 是试验一次后的子样，决策方案为

当

$$K_0P(H_1/X)>K_1P(H_0/X)\ 时，采纳\ H_1,$$
$$K_0P(H_1/X)<K_1P(H_0/X)\ 时，采纳\ H_0$$

决策的临界区域（即拒绝 H_0 的区域）为

$$D=\left\{X:\frac{P(H_1/X)}{P(H_0/X)}>\frac{K_1}{K_0}\right\} \tag{8'}$$

写成更紧凑的形式，决策不等式为

$$\frac{P(H_1/X)}{P(H_0/X)}\underset{acc.H_1}{\overset{acc.H_0}{\lessgtr}}\frac{K_1}{K_0} \tag{9}$$

其中 $acc.H_0$ 表示采纳 H_0.

注意到

$$\frac{P(H_1/X)}{P(H_0/X)}=\frac{P(X/H_1)P(H_1)}{P(X/H_0)P(H_0)}$$

于是(9)式成为

$$\frac{P(X/H_1)}{P(X/H_0)}\underset{acc.H_1}{\overset{acc.H_0}{\lessgtr}}\frac{K_1}{K_0}\cdot\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \tag{10}$$

仍以 $r=\sqrt{X^2+Z^2}$ 作为一次试验后的子样，则上式经过计算和化简，可得

$$r^2\underset{acc.H_1}{\overset{acc.H_0}{\lessgtr}}\frac{2\lambda^2\sigma_0^2}{\lambda^2-1}\log\left[\frac{K_1}{K_0}\lambda^2\frac{P(H_0)}{1-P(H_0)}\right] \tag{10'}$$

记上式右端为 R^2，那末 R^2 是 λ 和 $P(H_0)$ 的函数，即 $R^2=R^2(\lambda, P(H_0))$，这样，当落点落入以瞄准点 o 为心、R 为半径的圆内时，则采纳 H_0；否则，采纳 H_1.

Bayes 决策的风险就是

$$R=K_0P(H_1/r)+K_1P(H_0/r)$$

人们习惯于运用检验的 OC (Operation Characteristic) 函数，它为

$$\begin{aligned}L(\sigma^2)&=1-P\{r>C_{R(\lambda,P(H_0))}|\sigma^2\}\\&=1-e^{-\frac{1}{2}(\frac{R}{\sigma})^2}\end{aligned} \tag{11}$$

而

$$\begin{cases}\alpha=1-L(\sigma_0^2),\\ \beta=L(\sigma_1^2)\end{cases} \tag{12}$$

以(10')作为检验 H_0 的方案称为 Bayes 决策方案。

1.3 一次试验鉴定方案的信度(Fiducial)分析

如果在落区内，以 o 为原点，ρ 为半径作圆 C_ρ。现在考虑在落点 $(x, z) \in C_\rho$ 之下，原假设 H_0 成立的概率，即 $P\{H_0 | (x, z) \in C_\rho\}$。称它为关于 H_0 的信度，这种信度，对于现场试验只作一次的场合下，说明了一种把握程度，比较直观，是试验分析人员从另一个侧面对精度的一种论据。

由 Bayes 公式

$$P(H_0/(x,z) \in C_\rho) = \frac{P((x,z) \in C_\rho/H_0)P(H_0)}{P((x,z) \in C_\rho/H_0)P(H_0) + P((x,z) \in C_\rho/H_1)P(H_1)} \tag{13}$$

对于简单假设 $H_0:\sigma=\sigma_0 \leftrightarrow H_1:\sigma=\lambda\sigma_0$，记作 σ_1，可知

$$P((x,z) \in C_\rho/H_0) = P\{r < \rho/H_0\} = \int_0^\rho \frac{1}{\sigma_0^2} r e^{-\frac{r^2}{2\sigma_0^2}} dr$$

$$= 1 - e^{-\frac{1}{2}(\frac{\rho}{\sigma_0})^2}$$

而

$$P((x,z) \in C_\rho/H_1) = 1 - e^{-\frac{1}{2}(\frac{\rho}{\sigma_1})^2}$$

这样，(13)式成为

$$P(H_0/(x,z) \in C_\rho) = \frac{1}{1 + S(\rho, P(H_0))} \tag{13'}$$

式中

$$S(\rho, P(H_0)) = \frac{1 - e^{-\frac{1}{2}(\frac{\rho}{\sigma_1})^2}}{1 - e^{-\frac{1}{2}(\frac{\rho}{\sigma_0})^2}} \frac{1 - P(H_0)}{P(H_0)}$$

取 $\rho = k\sigma_0$，则

$$S(\rho, P(H_0)) = \frac{1 - e^{-\frac{1}{2}(\frac{k}{\lambda})^2}}{1 - e^{-\frac{1}{2}k^2}} \frac{1 - P(H_0)}{P(H_0)} \tag{14}$$

在具体作信度分析时，可以对不同的 k 及 $P(H_0)$ 作出函数 $P(H_0/(x,z) \in C_{k\sigma_0}$ 的图表。这里还可以看到验前信息对鉴定方案信度的影响，并由此提出对验前信息的保证要求。

2 一次现场试验结果与验前信息的一致性验证

利用验前信息作精度鉴定中，一个十分重要的问题是验前信息与现场试验的信息是相容的。否则上面的方法缺乏运用基础，所做出的结论，本身就是不可信赖的。这个问题在统计学上就是两个总体的一致性检验问题。通过两个总体的子样，作总体的一致性验证有不少现成的方法，且制作了检验的用表。然而，当现场试验的子样容量为 1 这种极端的场合，还必须给出一个比较实用的方法。

我们将运用样本按大小排序的方法，建立验证方案。假定 X 是现场试验结果。$(X_1^{(0)}, \cdots, X_n^{(0)})$ 是验前子样。给予统计假设

H_0：X 与验前子样有同一分布。

在 H_0 为真的条件下，将 X 与验前子样 $(X_1^{(0)}, \cdots, X_n^{(0)})$ 一起排序（由小到大排列）。例

如有

$$X_{(1)} \leqslant X_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant X_{(j-1)} \leqslant X_j^{(*)} \leqslant X_{(j+1)} \leqslant \cdots \leqslant X_n$$

其中 $X_j^{(*)}=X$，即 X 在排序中的名次为 j，那末在 H_0 为真的条件下，$X_j^{(*)}$ 的分布函数为

$$F_j(x) = \frac{(n+1)!}{(j-1)!\,(n+1-j)!}\int_0^{F(x)} t^{j-1}(1-t)^{n+1-j}\mathrm{d}t \tag{15}$$

如果 X 和验前样本具有同一分布，那末样本 X 在混合排序中不可能过分地靠近两端，也就是 $X_j^{(*)}$ 的取值不应过分地靠近次序统计量两端的值。于是总有 L_1，L_2，使

$$P\{X_j^{(*)} < L_1\} + P\{X_j^{(*)} > L_2\} = \alpha \tag{16}$$

α 为某个小的概率值。一般地，取 L_1，L_2，使满足

$$P\{X_j^{(*)} < L_1\} = P\{X_j^{(*)} > L_2\} = \alpha/2 \tag{17}$$

由(15)可知

$$P\{X_j^{(*)} < L_1\} = F_j(L_1) = \alpha/2, \tag{18}$$

$$P\{X_j^{(*)} > L_2\} = 1 - F_j(L_2) = \alpha/2 \tag{19}$$

这样，当给定显著水平 α，查不完全 β 函数表，可获得 L_1，L_2。

如果 $X_j^{(*)} < L_1$ 或 $X_j^{(*)} > L_2$，则拒绝 H_0

如果 $L_1 \leqslant X_j^{(*)} \leqslant L_2$，则采纳 H_0，即 X 与 $(X_1^{(0)},\cdots,X_n^{(0)})$ 属于同一总体。

上述检验方法是在分布 $F(x)$ 完全已知的情形下进行的。如果 $F(x)$ 为未知，在子样 $(X_1^{(0)},\cdots,X_n^{(0)})$ 的容量 n 充分大的场合，可用抽样分布 $F_n(x)$ 代替 $F(x)$。这在运用仿真方法获得验前信息的情况下，是完全可以实现的。如果 n 比较小，此时，可以运用自助(Bootstrap)方法，用再生样本获得 $F_n(x)$[1].

参考文献

1 张金槐，唐雪梅. Byaes 方法. 长沙：国防科技大学出版社，1989

2 张金槐. 再入飞行器材落点散布鉴定中验前概率的确定. 飞行器测控技术，1991，(2)：1～7

3 Rand Cooperation, circular covering function RM－330

4 张金槐，蔡洪. 飞行器试验统计学. 长沙：国防科技大学出版社，1995

(责任编辑　张静)