国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第18卷第4期 1996年12月 Vol. 18 No. 4

截尾序贯验后加权检验截尾点的优化设计*

张学斌 王维平 朱一凡

(国防科技大学系统工程与数学系 长沙 410073)

摘 要 选取截尾点是截尾序贯验后加权检验很关键的一步，目前理论上尚无有效的选取方法。本文用优化技术确定截尾点 C，克服了实践中确定停时 N 和截尾点 C 遇到的计算困难，避免了一般取 $C=1$ 的盲目性，使截尾点 C 的选取有了理论根据。优选的截尾点不仅使双方承担的风险之和最小，而且使双方承担的风险值相对合理，易于接受。

关键词 截尾序贯验后加权检验，截尾点，优化设计

分类号 O224

Optimal Design of Truncating Point in Truncated Sequential Posterior Odd Test

Zhang Xuebin Wang Weiping Zhu Yifan

(Department of Systems Engineering and Mathematics, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract It is very important to select a truncating point in the truncated sequential posterior odd test (SPOT), but there is no efficient method to solve the problem up to now. In the paper, the authors apply the optimization techniques to determine the truncating point. Having avoided selecting $C=1$, this method can overcome the difficulties in selecting the stop time N and truncating point C, and make the selection of C more theoretically. The optimal truncating point minimizes the risks undertaken by both sides become and makes them more acceptable.

Key words truncated sequential posterior odd test, truncating point, optimal design

1 问题的提出

精度鉴定是武器研制过程中不可缺少的重要环节。目前一般武器的精度鉴定主要依

* 国防预研基金资助项目
1996年3月26日收稿

靠靶场的实弹打靶数据进行统计估值或假设检验。对于技术复杂，造价昂贵，飞行试验成本极高的制导武器，只能进行数量很少的实弹打靶，这种方法显然是不可行的。在实际子样数据很少条件下的精度鉴定问题，统计学中称为小子样问题，这是制导武器研制过程中待解决的问题。

关于小子样检验理论，目前能较好解决小子样问题的是截尾序贯验后加权检验（Sequential Posterior Odd Test）方法，简称截尾 SPOT 方法，详见文献［1］。其具体作法如下。

如果 SPOT 方法在 $N-1$ 次试验之后仍未作出决策，那么在 N 次试验之后，在决策区间［A、B］中插入点 C，将继续试验区：$\{X: A<O_n<B\}$ 分割为二个区域：

$$\mathscr{D}_1 = \{X: A < O_n \leqslant C\}, \quad \mathscr{D}_2 = \{X: B > O_n > C\}$$

当子样 X 落入 $\mathscr{D}_1$ 时，即 $A<O_n\leqslant C$ 时采纳 H_0；而当子样 X 落入 $\mathscr{D}_2$ 时，即 $B>O_n>C$ 时采纳 H_1。这样，在第 N 次试验后必定终止试验，作出决策。记此截尾方案为 T_N，试验次数 N 称为停时。

当 $\theta\in\Theta_1$，子样 X 落在 $\mathscr{D}_1$ 中的概率，称为截尾取伪概率，记为 β_N。当 $\theta=\Theta_0$，子样 X 落入 $\mathscr{D}_2$ 中的概率，称为截尾弃真概率，记为 α_N。α_N 与 β_N 的计算十分困难，它的上界值 $\alpha_{N\pi 0}$与 $\beta_{N\pi 1}$也仅对某些特殊问题才能计算，文献［2］对于正态总体未知值方差的武器命中精度检验问题，给出了 $\alpha_{N\pi 0}$与 $\beta_{N\pi 1}$计算：

$$\alpha_{N\pi 0} = \alpha_{\pi 0} + I_{2N-2}^{(C)} - I_{2N-2}^{(B)} \tag{1}$$

$$\beta_{N\pi 1} = \beta_{\pi 1} + J_{2N-2}^{(A)} - J_{2N-2}^{(C)} \tag{2}$$

其中：

$$I_{2N-1}^{(C)} = \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_C}\right)^{\beta_0} \sum_{i=0}^{N-2} \left(\frac{k_c}{2\alpha_C}\right)^i \frac{\Gamma(\beta_0+i)}{\Gamma(\beta_0)i\,!} Q_{2(\beta_0+i)}\left(\frac{2\alpha_C}{D_0}\right) \tag{3}$$

$$I_{2N-1}^{(A)} = \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_A}\right)^{\beta_0} \sum_{i=0}^{N-2} \left(\frac{k_A}{2\alpha_A}\right)^i \frac{\Gamma(\beta_0+i)}{\Gamma(\beta_0)i\,!} K_{2(\beta_0+i)}\left(\frac{2\alpha_A}{D_0}\right) \tag{4}$$

$I_{2N-2}^{(B)}$和 $J_{2N-2}^{(C)}$的表达式分别由式（3）、（4）相应地将字母 C、A 换为 B、C 即可。

显然，选取截尾点是截尾 STOP 方法很关键的一步，不同的截尾点 C 对应着不同的截尾方案，有着不同的 $\alpha_{N\pi 0}$和 $\beta_{N\pi 1}$，并可能导致不同的检验结果。然而，截尾 STOP 方法从理论上并没有给出确定截尾点 C 的方法，如何选取截尾点 C 和停时 N，设计一个较好的截尾方案 T_N，专家们为此做了大量工作。一种方法是给定犯两种错误概率的上界 α_N^*，β_N^*，在此前提下，再给定截尾点 C 或者停时 N，根据式（1）和（2）解一元方程计算出 T_N 方案的另一要素 N 或者 C。文献［1］、［2］给出了所谓最小试验次数的计算公式：$N^* =\min\{N: \alpha_{N\pi 0}\leqslant\alpha_N^*, \beta_{N\pi 1}\leqslant\beta_N^*\}$，并给出了算例；文献［3］则给定 N，取满足 $\alpha_{N\pi 1}\leqslant\alpha_N^*$ 和 $\beta_{N\pi 1}\leqslant\beta_N^*$ 的点 C 作为截尾点（并不唯一），但 C 的解析表达式不易得到，只有数值解；文献［4］在用图解法求出 k_c 后，给出了 C 的表达式。另一种方法是给定停时 N，也给定截尾点 C，即给定 T_N 方案，然后计算 $\alpha_{N\pi 0}$，$\beta_{N\pi 1}$是否满足工程要求，$\alpha_{N\pi 0}\leqslant\alpha_N^*$ 和 $\beta_{N\pi 1}\leqslant\beta_N^*$。文献［4］令 $C=1$，$N=3$，4，5，文献［2］令 $N=8$，$C=1$，1.256 分别对武器落点精度检验给出了算例。

以上两种方法都是满足给定的 α_N^*，β_N^* 的前提下，寻求一个可行的截尾方案 T_N，而

没有在众多可行的方案中进行优选。本文试图用最优化技术克服这一局限。

2 截尾点 C 的优化数学模型

在式（1）～（4）中，α_0，β_0，A 和 B 对于给定的验前信息均为常数，$\alpha_{\pi0}$和 $\beta_{\pi1}$分别为非截尾时考虑验前信息的弃真和存伪概率，通常也取为常值[1]。这样 $\alpha_{N\pi0}$和 $\beta_{N\pi1}$为截尾点 C 和实际打靶次数 N 的二元函数。C 和 N 完全确定了截尾方案 T_N，优化数学模型的优化设计变量自然应取为 C 和 N。考虑小子样条件下制导武器精度鉴定的特点，实弹打靶次数不可能太多，N 的取值仅为有限的几个整数值：$N=1$，2，3，…，可首先根据可能承受的最大试验次数，给定 T_N 方案中的停时 N，即不把 N 作为优化设计变量。这样不仅降低了最大优化问题的维数，同时也避免把问题复杂化为混合离散变量最优化问题。于是，$\alpha_{N\pi0}$、$\beta_{N\pi1}$都仅为点 C 的一元函数，记为 g_α（C）、g_β（C），即：

$$\begin{cases} g_\alpha(C) = \alpha_{N\pi0} = \alpha_{\pi0} + I_{2N-2}^{(C)} - I_{2N-2}^{(B)} \\ g_\beta(C) = \alpha_{N\pi1} = \alpha_{\pi1} + I_{2N-2}^{(A)} - I_{2N-2}^{(C)} \end{cases} \tag{5}$$

优选截尾方案的目的首先是使试验次数 N 尽可能小，其次希望 $\alpha_{N\pi0}$、$\beta_{N\pi1}$也尽可能小。但要从式（3）、（4）解出 N 与 $\alpha_{N\pi0}$、$\beta_{N\pi1}$的反函数关系十分困难，因此，不宜以 N 作为目标函数。单独以 $\alpha_{N\pi0}$或 $\beta_{N\pi1}$为目标函数也不合适，它们二者是相关的，如果一个减小，另一个就会增大，所以目标函数取为两者的和，即

$$f(C) = \alpha_{N\pi0} + \beta_{N\pi1}$$

约束条件除设计变量 C 和 g_α（C）、g_β（C）的边界约束外，还应考虑保持 g_α（C）和 g_β（C）的值相近。

通过以上分析，对于给定的停时 N，以截尾点 C 为优化设计变量，截尾方案 T_N 的优化数学模型如下：

$$\begin{cases} \text{极小化:} f(C) = g_\alpha(C) + g_\beta(C) \\ \text{满足于:} \\ \qquad A < C < B \\ \qquad \alpha_{\pi0} < g_\alpha(C) \\ \qquad \beta_{\pi1} < g_\beta(C) \\ \qquad g_\beta(C) - g_\alpha(C) - \alpha = 0 \end{cases} \tag{6}$$

其中，g_α（C）、b_b（C）由式（5）给出；$\alpha_{\pi0}$、$\beta_{\pi1}$为非截尾 SPOT 方法犯两类错误的概率；α 为小于 1 的实数。

由于式（6）为单变量的约束最优化问题，求解比较容易，加之停时 N 的离散值个数有限，因而可对 $N=1$，2，3，…，n 分别解式（6），得到一系列与 N 值对应的最优截尾点 C^* 及 $\alpha_{N\pi0}$、$\beta_{N\pi1}$，实际上等于用穷举法求解了 C 与 N 两个混合离散变量的最优化问题。

3 计算实例分析

采用文献［5］中的 MPOP 程序解式（6）。该程序为 FORTRAN 语言编写的通用程序，以混合罚函数法求解约束最优化问题，要求用户提供一个计算目标函数与约束函数值的子程序。为计算式（3）、（4）的值，采用文献［6］中的 X2PNT 和 X2Q 两个模块，

分别计算 χ^2—分布的百分点与上概率。为便于对比观察优化截尾点的效果，计算使用的验前信息数据选自文献 [4]。

设验前子样容量 $n_0=5$，落点均方根偏差 $\tilde{\sigma}^{(0)}=1.274$，$D_0=1.623$(此时，$\tilde{\sigma}=\tilde{\sigma}^{(0)}=1.623$，即 σ 的验前估计同于原假设的额定值)，$\alpha_{\pi 0}=\beta_{\pi 1}=0.05$，此时有：

$\alpha_0=(n_0-1)[\tilde{\sigma}^{(0)}]^2=6.492$，$\beta_0=n_0=5$，$P_{H0}=Q_{2\beta_0}(2\alpha_0/D_0)=Q_{10}(8)=63\%$，

$A=0.0862$，$B=6.4$

按以上数据，运行 MPOP 程序，分别对停时 $N=2,3,\cdots,10$，取初始值 $C^0=1$，0.2，3.5 求解式(6)得表 1 所示的结果。

表 1 中上标“0”表示初始点 C^0 及相应的函数值，上标“＊”则表示最优点 C^* 及相应的函数值；α、β 分别表示弃真概率和取伪概率的上界 $\alpha_{N\pi 0}$、$\beta_{N\pi 1}$，其数值为百分数，%号省略。

表 1　截尾点 C 寻优计算结果

C^0	N	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	α^0	6.56	7.45	7.96	8.27	8.46	8.58	8.65	8.68	8.70
	β^0	35.95	30.14	26.19	23.69	21.88	20.47	19.35	18.41	17.63
	$\alpha^0+\beta^0$	42.51	37.59	34.16	31.97	30.34	29.06	28.00	27.10	26.33
1	α^*	10.76	11.86	12.12	12.10	11.97	11.79	11.62	11.44	11.27
	β^*	30.44	24.38	20.81	18.79	17.43	16.44	15.64	15.01	14.46
	$\alpha^*+\beta^*$	41.20	36.24	32.94	30.90	29.41	28.23	27.27	26.45	25.74
	C^*	0.517	0.544	0.565	0.584	0.600	0.616	0.628	0.614	0.651
	α^0	35.28	31.35	29.30	27.81	26.64	25.66	24.82	24.09	23.44
	β^0	15.82	12.66	10.58	9.53	8.87	8.41	8.07	7.80	7.59
	$\alpha^0+\beta^0$	51.10	44.02	39.88	37.35	35.51	34.08	32.89	31.89	31.03
0.2	α^*	10.77	11.87	12.12	12.09	11.96	11.80	11.62	11.45	11.27
	β^*	30.43	24.37	20.82	18.80	17.45	16.43	15.64	14.99	14.47
	$\alpha^*+\beta^*$	41.20	36.24	32.94	30.90	29.41	28.23	27.27	26.45	25.74
	C^*	0.517	0.543	0.565	0.584	0.601	0.615	0.629	0.640	0.651
	α^0									5.42
	β^0									26.25
	$\alpha^0+\beta^0$									31.67
3.5	α^*									11.28
	β^*									14.46
	$\alpha^*+\beta^*$									25.74
	C^*									0.651

从计算结果可以看出：

(1)对同一停时 N，从不同的初始点 C^0 开始，并用不同的无约束寻优方法搜索，最后基本都收敛于同一值 C^*，且目标函数值有所降低。这说明在区间[A、B]确实存在一个最优点。如表 1 中当 $N=10$ 时，$C^0=1$，$C^0=0.2$ 和 $C^0=3.5$ 都收敛于 $C^*=0.651$，目标

函数值分别由 26.33，31.03，31.67 降为 25.74。

(2)工程上一般习惯取 $C=1$[1]。计算表明，$C=1$ 时，双方所承担的风险 值过于悬殊。在表 1 中，$N=5$ 时，$\alpha^0=8.27\%$，$\beta^0=23.69\%$，$\alpha^0/\beta^0=0.35$；经过优化，截尾点 $C^*=0.554$，此时 $\alpha^*=12.10\%$，$\beta^*=18.79\%$，$\alpha^*/\beta^*=0.64$，双方承担的风险相对合理。

(3)停时 N 对 C^* 的影响不大，随 N 增大而稍有增大，当 N 由 2 变到 10，C^* 则由 0.516变为 0.651，但 N 对目标函数值 $\alpha^*+\beta^*$ 的影响较大，且随 N 增大而变小，即双方承担的风险之和随试验次数增加而减小。

4 结论

计算表明，本文构造的截尾点优化设计数学模型是合理的，简单实用，求解容易，效果理想。对给定的停时 N，优选的截尾点不仅使双方承担的风险之和最小，而且使双方承担的风险值相对合理，易于接受。

在截尾 STOT 方法中，用优化技术确定截尾点 C 是成功的。该方法克服了实践中确定停时 N 和截尾点 C 遇到的计算困难，避免了一般取 $C=1$ 的盲目性，使截尾点 C 的选取有了理论依据。

参 考 文 献

1 张金槐，唐雪梅. Bayes 方法. 长沙：国防科技大学出版社，1989

2 张金槐. 特小样本下落点密集度鉴定—SPOT 方法的应用. 飞行器测控技术，1989 (1)：1～16

3 张金槐. 关于 Bayes 序贯检验的一些思考. 飞行器测控技术，1992 (2)：1～8

4 张金槐. 利用验前信息的一种序贯检验方法—序贯验后加权检验方法. 国防科技大学学报，1991，13 (2)：1～13

5 余俊，周济. 优化方法程序库 OPB—1——原理及使用说明. 北京：机械工业出版社，1989，162～209

6 刘德贵. FORTRAN 算法汇编第二分册. 北京：国防工业出版社，1983

（责任编辑　石少平）