国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第19卷第1期 1997年2月 Vol. 19 No. 1

噪声统计的 Bayes 极大验后估计与系统自适滤波*

蔡 洪

(国防科技大学自动控制系 长沙 410073)

摘 要 对于具有测量的线性离散系统, 在系统动力学噪声与测量统计特性未知的情况下, 本文推导出了噪声统计特性在具有正态-逆 Wishart 分布验前信息情况之下的 Bayes 极大验后 (MAP) 估计及其实时追近, 从而获得了系统的自适应滤波。

关键词 Bayes 方法, 极大验后估计, 自适应滤滤

分类号 O213.9

Bayesian MAP Estimation of Noise Statistics and System Adaptive Filtering

Cai Hong

(Department of Automatic Control, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract For linear discrete systems with unknown noise statistics, the Bayesian maximum a posteriori (MAP) estimation of noise statistics are its real-time approximation are deduced considering that the prior information of noise statistics is normal-inverted-Wishart distribution. Based on this, the system adaptive filtering is obtained.

Key words Bayes method, MAP estimator, adaptive filtering

考虑如下线性离散系统:
$$X_{K+1} = A_K X_K + W_K \tag{1}$$
$$Z_K = C_K X_K + V_K \tag{2}$$
其中 X_K 是 n 维的状态向量, Z_K 是 m 维的测量向量, A_K 是已知的 $n\times n$ 维的状态转移矩阵, C_K 是已知的 $n\times m$ 维的测量系数矩阵, $\{W_K\}$, $\{V_K\}$ 为互不相关的正态白噪声序列, 且
$$E[W_K] = q_K, \mathrm{Var}[W_K] = Q_K, E[V_K] = r_K, \mathrm{Var}[V_K] = R_K \tag{3}$$
设状态 X 的初始条件 X_0 服从 $X_0 \sim N(\hat{X}_{00}, P_{00})$, 且 X_0 与 $\{W_K\}$, $\{V_K\}$ 不相关。当噪声统计特性 $\Theta_K = (q_K \quad Q_K \quad r_K \quad R_K)$ 已知时, X_K 的无偏最小均方差估计可由 Kalman 滤波公式给出[1]。

* 1996年9月17日收稿

当噪声统计特性 Θ_K 未知时，不能直接应用标准Kalman 滤波公式，须获取 Θ_K 的某种估计以代替未知的噪声统计特性，从而获系统状态的自适应滤波。关于噪声统计特性的估计，已有方法中最具代表性的要算 Tapley 的噪声统计特性直接递推估计方法[2]，这实际上是一种不考虑验前信息的矩估计方法。在实际工程问题中，噪声统计特性往往具有验前信息，也就是说对噪声特性具有一定了解，那么应当将这些验前的信息在自适应滤波中加以体现。为此，本文按 Bayes 统计推断中共轭分布的思想，在噪声统计特性的验前信息描述为正态- 逆 wishart 分布的情况之下，研究其自适应实时估计问题。

1　噪声统计的 **Bayes** 极大验后估计

设 $q_K = q$，$Q_K = Q$，$r_K = r$，$R_K = R$，q，Q，r，R 均为常值。从 Bayes 观点出发，参数 $\Theta = (q, Q, r, R)$ 与状态集 $X^{(K)} = \{X_1, \cdots, X_K\}$ 其于测量数据 $Z^{(K)} = \{Z_0, X_1, \cdots, Z_K\}$ 的联合验后概率密度函数 $\pi(X^{(K)}, \Theta\ Z^{(K)})$ 是对 Θ 和 $X^{(K)}$ 进行统计推断的依据。

根据正态总体下 Bayes 统计推断中共轭分布的思想[3,4]，取 $\pi(q, Q)$，$\pi(r, R)$ 为相互独立的正态- 逆 Wishart 分布，即

$$\pi(\Theta) = \pi(q, Q)\pi(r, R) \tag{4}$$

$$\pi(q, Q) \infty\ Q^{-(p_1+1)/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}[(q-q_0)^{\mathrm{T}}Q^{-1}(q-q_0)b_1 + \mathrm{tr}Q^{-1}D_1]\right\} \tag{5}$$

$$\pi(r, R) \infty\ R^{-(p_2+1)/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}[(r-r_0)^{\mathrm{T}}R^{-1}(r-r_0)b_2 + \mathrm{tr}R^{-1}D_2]\right\} \tag{6}$$

(5)、(6) 式中 $b_1 > 0, b_2 > 0, p_1, p_2$ 为逆 Wishart 分布的自由度，D_1, D_2 为正定矩阵。关于正态- 逆 Wishart 分布的定义参见文献[3,5]。

根据Bayes 方法有　$\pi(X^{(K)}, \Theta\ Z^{(K)}) \infty \pi(X^{(K)}, Z^{(K)}\ \Theta)\pi(\Theta)$

$$\infty \pi(XS0)\pi(\Theta)\prod_{i=1}^{K}\pi(Z_i\ X_i, \Theta)\pi(X_i\ X_{i-1}, \Theta) \tag{7}$$

注意到 $\pi(X_0) \sim \mathrm{N}(\hat{X}_{00}, P_{00})$ 与 Θ 及 $X^{(K)}$ 无关，而

$$\pi(Z_i\ X_i, \Theta) \infty\ R^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}[(Z_i - C_iX_i - r)^{\mathrm{T}}R^{-1}(Z_i - C_iX_i - r)]\right\} \tag{8}$$

$$\pi(Z_i\ X_{i-1}, \Theta) \infty\ Q^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}[(X_i - A_iX_{i-1} - q)^{\mathrm{T}}Q^{-1}(X_i - A_iX_{i-1} - q)]\right\} \tag{9}$$

于是

$$\begin{aligned}\pi(X^{(K)}, \Theta\ Z^{(K)}) \infty\ Q^{-(K+p_1+1)/2}\ R^{-(K+p_2+1)/2}\exp\Big\{-\frac{1}{2}[&(q-q_0)^{\mathrm{T}}Q^{-1}(q-q_0)b_1 \\ &+ (r-r_0)^{\mathrm{T}}R^{-1}(r-r_0)b_2 + \mathrm{tr}Q^{-1}D_1 + \mathrm{tr}R^{-1}D_2 \\ &+ \sum_{i=1}^{K}(X_i - A_iX_{i-1} - q)^{\mathrm{T}}(X_i - A_iX_{i-1} - q) \\ &+ \sum_{i=1}^{K}(Z_i - C_iX_i - r)^{\mathrm{T}}R^{-1}(Z_i - C_iX_i - r)]\Big\}\end{aligned} \tag{10}$$

设(10) 式在 $\hat{q}_K, \hat{Q}_K, \hat{r}_K, \hat{R}_K$ 和 $\hat{X}_{iK}, i = 1, 2, \cdots, K$ 处具有极大值，则 $\hat{q}_K, \hat{Q}_K, \hat{r}_K, \hat{R}_K$ 和 $\hat{X}_{iK}, i = 1, 2, \cdots, K$ 即为 q, Q, r, R 和 $X_i, i = 1, 2, \cdots, K$ 的 Bayes 极大验后估计。经推导与计算得

$$\hat{q}_K = \frac{1}{K + b_1}\left[b_2q_0 + \sum_{i=1}^{K}(\hat{X}_{iK} - A_{i-1}\hat{X}_{i-1\,K})\right] \tag{11}$$

$$\hat{Q}_K = \frac{1}{K + p_1 + 1}\Big[b_1(q - q_0)(q - q_0)^{\mathrm{T}} + D_1$$

$$+ \sum_{i=1}^{K}(\hat{X}_{iK} - A_{i-1}\hat{X}_{i-1K} - q)(\hat{X}_{iK} - A_{i-1}\hat{X}_{i-1K} - q)^{\mathrm{T}}\Big] \tag{12}$$

$$\hat{r}_K = \frac{1}{K + b_2}\Big[b_2 r_0 + \sum_{i=1}^{K}(Z_i - C_i\hat{X}_{iK})\Big] \tag{13}$$

$$\hat{R}_K = \frac{1}{K + P_2 + 1}\Big[b_2(r - r_0)(r - r_0)^{\mathrm{T}} + D_2$$

$$+ \sum_{i=1}^{K}(Z_i - C_i\hat{X}_{iK} - r)(Z_i - C_i\hat{X}_{iK} - r)^{\mathrm{T}}\Big] \tag{14}$$

(11)～(14) 式所示的噪声统计特性的估值与系统状态 $X^{(K)}$ 的 Bayes MAP 估计 $\hat{X}_{iK}$, $i= 1, \cdots, K$ 有关，而 $\hat{X}_{iK}$实质上是 X_i 基于测量数据 $Z^{(K)} = (Z_1, \cdots, X_K)$ 的平滑估值，其最优值的获取依赖于精确的动力学模型和测量模型，即是说与噪声统计特性 q，Q，r，R 有关，因此难以同时求得 $\hat{q}_K$，$\hat{Q}_K$，$\hat{r}_K$，$\hat{R}_K$ 与 $\hat{X}_{iK}$，$i= 1, \cdots, K$ 的最优解。一种解决的办法是将状态平滑估值 $\hat{X}_{iK}$，$i= 1, \cdots, K$ 与噪声统计特性估值 $\hat{q}_K$，$\hat{Q}_K$，$\hat{r}_K$，$\hat{R}_K$ 交互迭代迫近而得到 Θ和 $X^{(K)}$ 的近似最优估计。但迭代平滑计算量太大，不便于实时处理，在工程应用中还需作适当的近似简化，以增强适用性。

2 Bayes 极大验后估计的实时迫近

进一步分析噪声统计特性 Bayes MAP 估计 (11) ～ (14) 式发现，$\hat{q}_K$，$\hat{Q}_K$，$\hat{r}_K$，$\hat{R}_K$ 不便于实时计算的最大原因是表达式中含有状态 X 的平滑估值，如果以状态 X 的实时估值即滤波值 $\hat{X}_{ii}$代替，则大大增强了(11)～(14) 式计算的实时性，因为 $\hat{X}_{ii}$可以由 Kalman 滤波实时递推计算而得。由标准 Kalman 滤波可知，$\hat{X}_{KK}$的计算须用到 K 时刻的测量噪声统计特性和 $K-1$时刻的动力学噪声统计特性。因此在噪声统计特性的实时近似迫近时，应避免 $\hat{r}_K$，$\hat{R}_K$ 与 $\hat{X}_{KK}$，以及 $\hat{q}_K$，$\hat{Q}_K$ 与 $\hat{X}_{K+1K+1}$同时出现，为此，(11) 和 (12) 式中以 $\hat{X}_{ii}$代替 $\hat{X}_{iK}$，以 $\hat{X}_{i-1i-1}$代替 $\hat{X}_{i-1K}$，而 (13) 和 (14) 式中以 $\hat{X}_{ii-1}$代替 $\hat{X}_{iK}$。然而 (12) 和 (14) 式经此处理后会产生统计偏差。事实上，若记经此处理后 Q_K，R_K 的估计量为 Q_K^*，R_K^*，则易知，

$$\mathrm{E}[Q_K^*] = \frac{1}{K + p_1 + 1}\Big[b_1(q - q_1)(q - q_1)^{\mathrm{T}} + D_1 + KQ$$

$$+ \sum_{i=1}^{K}(A_{i-1}P_{i-1i-1}A_{i-1}^{\mathrm{T}} - P_{ii})\Big]$$

$$\mathrm{E}[R_K^*] = \frac{1}{K + p_2 + 1}\Big[b_2(r - r_1)(r - r_1)^{\mathrm{T}} + D_2 + KR + \sum_{i=1}^{K}(C_iP_{ii-1}C_i^{\mathrm{T}}\Big]$$

上两式中方括号中的最后一项是主要的统计偏差项。而这两项是可以从 Q_K^*，R_K^* 中进行扣除的。经过这种偏差补偿后，可得噪声统计特性的如下渐近无偏估计:

$$\hat{q}_K = \frac{1}{K + b_1}\Big[b_1 q_0 + \sum_{i=1}^{K}(\hat{X}_{ii} - A_{i-1}\hat{X}_{i-1i-1})\Big] \tag{15}$$

$$\hat{Q}_K = \frac{1}{K + p_1 + 1}\Big[b_1(q - q_0)(q - q_0)^{\mathrm{T}} + D_1$$

$$+ \sum_{i=1}^{K}\left(G_i v_i v_i^{T} G_i^{T} - A_{i-1}P_{i-1\,i-1}A_{i-1}^{T} + P_{i\,i}\right)\Big] \tag{16}$$

$$\hat{r}_K = \frac{1}{K+b_2}\Big[b_2 r_0 + \sum_{i=1}^{K}\left(Z_i - C_i\hat{X}_{i\,i-1}\right)\Big] \tag{17}$$

$$\hat{R}_K = \frac{1}{K+p_2+1}\Big[b_2(r-r_0)(r-r_0)^{T} + D_2 + \sum_{i=1}^{K}\left(v_i v_i^{T} - C_i P_{i\,i-1}C_i^{T}\right)\Big] \tag{18}$$

其中 $v_i = Z_i - C_i\hat{X}_{i\,i-1} - \hat{r}_i \qquad G_i = P_{i\,i-1}C_i^{T}\left[C_i P_{i\,i-1}C_i^{T} + R_i\right]^{-1}$

将(15)～(18)式表示为递推形式为:

$$\hat{q}_{K+1} = \hat{q}_K + \frac{1}{K+b_1+1}G_{K+1}v_{K+1} \tag{19}$$

$$\hat{Q}_{K+1} = \hat{Q}_K + \frac{1}{K+p_1+2}\left(G_{K+1}v_{K+1}v_{K+1}v_{K+1}^{T} - G_{K+1}C_{K+1}P_{K+1\,K}\right) \tag{20}$$

$$\hat{r}_{K+1} = \hat{r}_K + \frac{1}{K+b_2+2}\left(Z_{K+1} - C_{K+1}\hat{X}_{K+1\,K} - \hat{r}_K\right. \tag{21}$$

$$\hat{R}_{K+1} = \hat{R}_K + \frac{1}{K+p_2+2}\left(v_{K+1}v_{K+1}^{T} - C_{K+1}P_{K+1\,K}C_{K+1}^{T} - \hat{R}_K\right) \tag{22}$$

以(19)～(22)式所示估值代替未知的噪声统计特性, 运用 Kalman 滤波公式, 即可获得系统状态的自适应估计。

3 仿真实例

考虑系统 $X_{K+1} = 0.9X_K + W_K$

$Z_K = (1\ \ln K)^{T} X_K + V_K$

其中 $W_K \sim N(r, R)$, $q = 10$, $R = I$ 已知, 应用本文给出的自适应估计算法对状态 X_K 及 Q, $r = (r_1, r_2)^{T}$ 进行估计(其中(19)和(22)式用已知值)。

初始条件取为:

$\hat{X}_{0\,0} = 98$, $P_{0\,0} = 100$, $\hat{r}_0 = (0, 0)^{T}$, $\hat{Q}_0 = 16$

Q, r 的估计见图1所示。

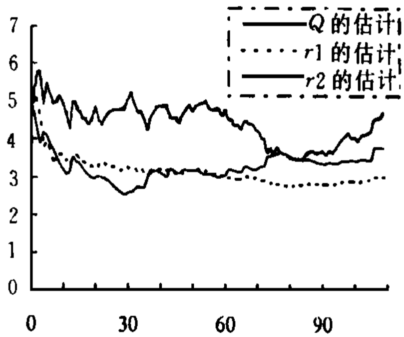

图 1 Q, r 的估计

仿真中, Q, r, X_0 的真值分别为 $Q = 4$, $r = (3, 5)^{T}$, $X_0 = 100$, 由图1可见, Q, r 的估值较好地接近于各自的真值。

参 考 文 献

1 张金槐, 蔡洪. 飞行器试验统计学. 长沙: 国防科技大学出版社, 1995

2 Meyers K A, Tapley B D. Adaptive sequential estimation with unkown noise statistics. IEEE Trans. AC, 1976, 21(4): 520～523

3 张金槐. Bayse 方法. 长沙: 国防科技大学出版社, 1993

4 Broemeling L D. Bayes Analysis of Linear Models. New York: Marcel Dekker Inc. 1985

5 Muirhead R J. Aspects of Multivariate Statistical Theoay. New York: John wiley & sons Inc. 1982

(责任编辑 张 静)