国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第19卷第2期　1997年4月　Vol.19 No.2

序统计滤波器的一些特性*

高　政　戴　斌

(国防科技大学自动控制系　长沙　410073)

摘　要　本文分析了序统计滤波器的特性,并提出了它的几个统计特性。给出了输出信号的解析表达。并着重分析了它的联合分布,从而对输出信号的独立性进行了一定的描述。这为滤波器的设计提供了理论依据。

关键词　序统计滤波器,统计分析,分布函数,边缘检测

分类号　TN713,O213.9

Some Properties of Order-Statistic Filters

Gao Zheng　Dai Bin

(Department of Automatic Control, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract　In this paper, several statistic properties of order-statistic fitlters (OSF) have been proposed, and some properties of OSF have been analysised. The well-analytic distribution functions of OSF´output have been given. It is our major work to analyse the joint distributions of OSF´output. The independence of OSF´output has been discribed. All the analysis offers an analytic tool to process the noisy images.

Key words　order-statistic filter, statistic analysis, distribution function, edge detection

序统计滤波器 Order-Statistic Filter 的统计特性分析非常重要[2],[4],[5]. 但现有文献给出的输出分布函数解析度不高,而且缺乏对联合分布的分析,甚至错误地认为独立同分布(简称 i.i.d.)信号通过非线性滤波器仍能得到 i.i.d. 信号([4], property 11)。这样容易让人误以为级联的非线性滤波器的分析十分简单。针对以上情况,本文给出了较[5]解析程度更高的分布函数,并对其联合分布进行了分析。在这个基础上,对输出信号的独立性进行了一定的探讨。

* 国家自然科学基金和国防预研基金资助项目
1996年6月5日收稿

1 序统计滤波器简介

出于数字处理的考虑, 我们一般把论域取为 $\mathbf{Z}^n$, 这里 $\mathbf{Z}$ 为整数集合, 对于图像处理而言, $n=2$. 出于对机器字长的考虑, 可认为函数的值域是离散有界的, 即 $G=\{0, 1, 2, \cdots, M\}$, M 通常为 255. 令 $\mathbf{F}=G^{\mathbf{Z}^n}$ 即所有 $f: \mathbf{Z}^n \to G$ 的集合。

设 $f \in \mathbf{F}$, $A \subseteq \mathbf{Z}^n$ 且 A 是有限集, 则函数 f 的以 A 为模板的 r 阶序统计函数用 $OS^r(f, A)$ 来表示, $\forall x \in \mathbf{Z}^n$, $OS^r(f, A)(x)$ 等于重集 $\{f(y): y \in A_x\}$ 的第 r 大值。

记为: $OS^r(f, A)(x) \overset{\Delta}{=} r^{th}\{f(y): y \in A_x\}$ (1)

这里 A_x 为集合 A 关于 x 的平移: $A_x=\{x+y: y \in A\}$

为了说明序统计滤波器的阈值可交换性, 文献[1]引入二值序统计滤波器的概念。

设 $A, B \subseteq \mathbf{Z}^n$; χ 为 B 的特性函数, 即 $\chi_B(x)=\begin{cases}1 & x \in B \\ 0 & x \notin B\end{cases}$ (2)

显然特性函数唯一地决定了一个 $\mathbf{Z}^n$ 的子集, B 的以 A 为模板的二值 r 阶统计用 $BOS^r(B, A)$ 来表示, 它的特性函数规定为 $\chi_{BOS^r(B, A)}=OS^r(\chi_B, A)$ (3)

容易得到 $BOS^r(B, A)$ 的另外一个等效定义 $BOS^r(B, A)=\{x: B \cap A_x \geq r\}$ (4)

$\cdot$ 表示集合的基数, 对于 $\mathbf{Z}^n$ 中的有限集合, A 表示集合 A 的点数。

设 $f \in \mathbf{F}$, $t \in G$, f 的 t 位截集 $X_t(f)$ 定义为: $X_t(f)=\{x: f(x)>t\}$ (5)

这里 $X_t(f)$ 的定义与文献[1]上的有所不同, 这是为了以后的分析方便。下面我们证明, 虽经如此定义, 序统计滤波器仍具有阈值可交换性。

性质 **1** $X_t[OS^r(f, A)]=BOS^r[X_t(f), A]$ (6)

证明 $\forall x \in \mathbf{Z}^n$, $x \in X_t[OS^r(f, A)] \Leftrightarrow OS^r(f, A)(x)>t$

$\Leftrightarrow r^{th}\{f(a): a \in A_x\}>t \Leftrightarrow x_t(f) \cap A_x \geq r \Leftrightarrow x \in BOS^r[X_t(f), A]$ 证毕。

2 序统计滤滤器的统计分析

下面我们对序统计滤波器的统计特性进行分析。当一定的信号模型通过滤波器时, 我们需要分析输出信号的统计特性, 以便分析滤波器在噪声干扰情况下的表现。

在以下的分析中, 我们假定序统计滤波器的输入信号 f 为 i. i. d. 信号, 即 $\forall x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbf{Z}^n$, 随机变量 $f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)$ 相互独立, 且具有相同的分布函数

$$F_{x_1}(t)=F_{x_2}(t)=\cdots=F_{x_n}(t)=F(t) \quad (t \in G,) \tag{7}$$

其中, $F_x(t)=P_r\{f(x) \leq t\}$ $P_r\{\cdot\}$ 表示事件的概率 (8)

性质 **2** 序统计滤波器的输出 $g=OS^r(f, A)$ 也是同分布信号, 且

$$G(t)=\sum_{i=0}^{r-1} C_N^i(1-F(t))^i(F(t))^{N-i}, \quad \text{这里 } N=A \tag{9}$$

证明

$$\begin{aligned}G_x(t) &= P_r\{g(x) \leq t\}=P_r\{x \notin X_t(g)=BOS^r[X_t(f), A]\} \\ &= P_r\{X_t(f) \cap A_x<r\}=P_r\{\bigvee_{i=0}^{r-1} X_t(f) \cap A_x=i\} \text{(其中 } \vee \text{ 表示命题的“或”)} \\ &= \sum_{i=0}^{r-1} P_r\{\text{在 } A_x \text{ 中恰好有 } i \text{ 个点属于 } X_t(f)\}\end{aligned}$$

$= \sum_{i=0}^{r-1} C_N^i P_r\{A_x$ 中某 i 个特定的点属于 $X_t(f)$, 另外 $N - i$ 个点不属于 $X_t(f)\}$

$= \sum_{i=0}^{r-1} C_N^i (1-\alpha)^i(\alpha)^{n-i}$ （α为任一点不属于 $X_t(f)$ 的概率,

$i.e.\quad \alpha = P_r\{y \notin X_t(f)\} = P_r\{f(y) \le t\} = F(t))$

$= \sum_{i=0}^{r-1} C_N^i (1 - F(t))^i (F(t))^{N-i}$

可见 $G_x(t)$ 与 x 无关, 可统一写成 $G(t)$. 证毕。

下面我们通过分析输出信号的联合概率分布函数, 来分析其统计性质。

设 $G_{x_1,x_2}(t_1,t_2)$ 表示输出信号 g 在 x_1, x_2 点上的联合概率分布函数:

$$G_{x_1,x_2}(t_1,t_2) = P_r\{g(x_1) \le t_1 \wedge g(x_2) \le t_2\} \tag{10}$$

我们有:

$G_{x_1,x_2}(t_1,t_2) = P_r\{g(x_1) \le t_1 \wedge g(x_2) \le t_2\}$

$= P_r\{x_1 \notin X_{t_1}(g) \wedge x_2 \notin X_{t_2}(g)\}$

$= P_r\{ |X_{t_1}(f) \cap A_{x_1}| < r \wedge |x_{t_2}(f) \cap A_{x_2}| < r\}$

$= P_r\left\{\left(\bigvee_{i=0}^{r-1} |X_{t_1}(f) \cap A_{x_1}| = i\right) \wedge \left(\bigvee_{i=0}^{r-1} |X_{t_2}(f) \cap A_{x_2}| = j\right)\right\}$

$= P_r\left\{\bigvee_{i=0}^{r-1}\bigvee_{j=0}^{r-1}\left(|X_{t_1}(f) \cap A_{x_1}| = i \wedge |X_{t_2}(f) \cap A_{x_2}| = j\right)\right\}$

$$= \sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{r-1} P_r\left\{ |X_{t_1}(f) \cap A_{x_1}| = i \wedge |X_{t_2}(f) \cap A_{x_2}| = j\right\} \tag{11}$$

进一步研究不同的情况, 我们可以得到:

性质 3 当 $A_{x_1} \cap A_{x_2} = \varnothing$ 时, 即 x_1, x_2 之间的距离大于模板的尺寸时, 随机变量 $g(x_1), g(x_2)$ 相互独立。

证明

$P_r\left\{ |X_{t_1}(f) \cap A_{x_1}| = i \wedge |X_{t_2}(f) \cap A_{x_2}| = j\right\}$

$= P_r\{A_{x_1}$ 中恰有 i 点属于 $X_{t_1}(f)$ 且 A_{x_2} 中恰有 j 点属于 $X_{t_2}(f)\}$

$= C_N^i C_N^j P_r\{A_{x_1}$ 中有某 i 个确定的点属于 $X_{t_1}(f)$

且 A_{x_2} 中有某 j 个确定的点属于 $X_{t_2}(f)\}$

$= C_N^i C_N^j (1-\alpha)^i \alpha^{N-i} (1-\beta)^j \beta^{N-j}$

(其中: $\alpha = P_r\{y \notin X_{t_1}(f)\} = P_r\{F(y) \le t_i\} = F(t_1)$

$\beta = P_r\{y \notin X_{t_2}(f)\} = P_r\{F(y) \le t_2\} = F(t_2))$

$= C_N^i C_N^j (1 - F(t_1))^i F(t_1)^{N-i} (1 - F(t_2))^j F(t_2)^{N-j}$

代入(11)式得: $G_{x_1,x_2}(t_1,t_2) = G_{x_1}(t_1) G_{x_2}(t_2)$ (12)

即当 $A_{x_1} \cap A_{x_2} = \varnothing$ 时, $g(x_1), g(x_2)$ 相互独立。 证毕。

性质 4 当 $t_1 = t_2 = t, A_{x_1} \cap A_{x_2} = \varnothing$ 时,

$$G_{x_1,x_2}(t_1,t_2) = \sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{k=0}^{\min(i,j,M)} C_M^k C_{N-M}^{i-k} C_{N-M}^{j-k} (1 - F(t))^{i+j-k} F(t)^{2N-M-i-j+k} \tag{13}$$

(其中: $M = |A_{x_1} \cap A_{x_2}|$), 且 $g(x_1), g(x_2)$ 不一定相互独立。

证明

$P_r\left\{ |X_{t_1}(f) \cap A_{x_1}| = i \wedge |X_{t_2}(f) \cap A_{x_2}| = j\right\}$

$$= P_r\{\bigvee_{k=0}^{\min(i,j,M)} [A_{x_1} \cap A_{x_2} \text{中恰有 } k \text{ 个 } X_t(f) \text{ 的点}] \wedge$$

$$[A_{x_1}/A_{x_2} \text{中恰有 } i-k \text{ 个 } X_t(f) \text{ 的点}] \wedge [A_{x_2}/A_{x_1} \text{中恰有 } j-k \text{ 个 } X_t(f) \text{ 的点}]\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\min(i,j,M)} P_r\{[A_{x_1} \cap A_{x_2} \text{中恰有 } k \text{ 个 } X_t(f) \text{ 的点}] \wedge$$

$$[A_{x_1}/A_{x_2} \text{中恰有 } i-k \text{ 个 } X_t(f) \text{ 的点}] \wedge [A_{x_2}/A_{x_1} \text{中恰有 } j-k \text{ 个 } X_t(f) \text{ 的点}]\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\min(i,j,M)} C_M^k C_{N-M}^{i-k} C_{N-M}^{i-k} P_r\{[A_{x_1} \cap A_{x_2} \text{中某 } k \text{ 个确定的点属于 } X_t(f)] \wedge$$

$$[A_{x_1}/A_{x_2} \text{中某 } i-k \text{ 个确定的点属于 } X_t(f)] \wedge [A_{x_2}/A_{x_1} \text{中某 } j-k \text{ 个确定的点属于 } X_t(f)]\}$$

$$= \sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{k=0}^{\min(i,j,M)} C_M^k C_{N-M}^{i-k} C_{N-M}^{j-k} (1-F(t))^{i+j-k} F(t)^{2N-M-i-j+k}$$ 证毕。

可见,当 $M=0$ 时,式(12)成立。否则很容易举出等式不成立的反例。这样一来,分析序统计滤波器的级联的统计特性成了十分困难的事情。

性质 **5**　当 $t_1 > t_2$, $A_{x_1} \cap A_{x_2} \neq \cong$ 时,我们可以得出 $G_{x_1,x_2}(t_1,t_2)$ 的上下界:

$$G_{x_1,x_2}(t_2,t_2) \le G_{x_1,x_2}(t_1,t_2) \le G_{x_1,x_2}(t_1,t_1) \quad (14)$$

证明　由于 $X_{t_1}(f) \subset X_{t_2}(f)$,有

$$G_{x_1,x_2}(t_1,t_2) = P_r\{x_1 \notin X_{t_1}(g) \wedge x_2 \notin X_{t_2}(g)\} \ge P_r\{x_1 \notin X_{t_2}(g) \wedge x_2 \notin X_{t_2}(g)\},$$

同时 $G_{x_1,x_2}(t_1,t_2) \le P_r\{x_1 \notin X_{t_1}(g) \wedge x_2 \notin X_{t_1}(g)\}$,故可以得出 $G_{x_1,x_2}(t_1,t_2)$ 的上下界:

$$P_r\{x_1 \notin X_{t_2}(g) \wedge x_2 \notin X_{t_2}(g)\} \le G_{x_1,x_2}(t_1,t_2) \le P_r\{x_1 \notin X_{t_1}(g) \wedge x_2 \notin X_{t_1}(g)\}$$ 证毕。

$t_1 < t_2$ 情况下的分析是类似的。

3　结论

以上我们分析了序统计滤波器的若干特性,并提出了它的一些统计分析结果。序统计滤波器的输出信号的分布函数具有良好的解析表达,但是它的输出信号的独立性是有条件的。另外它还可用VLSI并行实现,造价也十分低廉。作为一种非线性的滤波器,它能够达到线性滤波器所达不到的某些效果。它比线性滤波器更具有局部性。

参考文献

1　Gao Z, He H, Liu J etc. Threshold Decomposition of Soft-Morphological Filters into FSP Morphological Filters and Order-statistic Filters. Image Algebra and Morphological Image Processing V, Proc. SPIE. 1994, 2300: 279～288
2　Wendt P D, Coyle E J, Gallagher N C. Stack Filters. IEEE Trans. on ASSP_ 34, 1986, (4): 898～911
3　Chen K. Bit-serial realizations of a classs of nonlinear filters based on positive Boolean functions. IEEE Trans. on CAS_ 36 1989, (6), 787～794
4　Stevenson R L, Arce G R. Morphological filters: Statistics and further syntactic properties. IEEE Trans. on CAS= 34, 1987, (11): 1292～1305
5　Yli-Harja O, Astola J, Neuvo Y. Analysis of the properties of median and weighted median filters using threshold logic and stack filter representation. IEEE Trans. on Signal Processing, SP_ 39, 1991: 395～410
6　Huttenlocher D P, Klanderman G A, Rucklidge W J. Comparing Images using the Hausdroff distance. IEEE Trans. on PAMI_ 15, 1993: 850～863
7　Canny J F. A computational approach to edge detection. IEEE Trans. on PAMI_ 8, 1986: 679～698

(责任编辑　张　静)