国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第19卷第5期 1997年10月 Vol. 19 No. 5

推理树概率逻辑公式集有效赋值列数计算*

张晨东 陈火旺 王兵山 徐 光
(国防科技大学计算机系 长沙 410073) (空军指挥学院 北京 100081)

摘 要 本文通过对概率逻辑推理树知识结构模型的研究，得出在树推理中对矩阵列消减起主要作用的相邻关系及其计算方法，给出了树推理模型的有效赋值列数的一般计算方法。

关键词 概率逻辑，线性规划，不确定性推理，树推理
分类号 TP301.6

Calculation the Number of Valid Assignments of the Formula Set in Probabilistic Logic

Zhang Chendong Chen Huowang Wang Bingshan
(Department of Computer, NUDT, Changsha, 410073)

Xu Guang
(AFCC, BeiJing, 100081)

Abstract This paper, based on the simple tree inference structure, has developed the relationship between some of the formulas. Since the inference tree has both of the features of the single clique and multiple cliques, a unique formula has given to calculate the number of valid assignments of formula set.

Key words probabilistic logic, linear programming, uncertainty inference, tree inference

D. K & C. H. P 基于广义线性规划的列生成法思想，设计了概率逻辑线性规划模型[1]列生成算法（column-generation）并进行了实例运算测试[2]。由于在生成列的过程中

* 1997年2月26日收稿

需要进行启发式计算，算法的可靠程度主要取决于生成列一步的启发式设计。如果能对规划模型列的性质有准确的掌握，将有助于新的计算或辅助计算方法的设计。本文基于推理树模型，研究公式相关性与规划模型有效列数的关系，并得出了一般计算公式和递归算法。

1 简单树推理模型中的有效公式赋值列

从概率逻辑的线性规划模型的求解方法来看，只考虑不带相同列的公式集赋值，对简化计算有重要意义。在推理网络中，公式之间的相关性经常存在，这从另一方面给出了公式集的有效赋值的等价含义。即除去公式集赋值集中那些使赋值后的公式集不一致的列，就能得到公式集的相容赋值集（即有效赋值集）。这一点可由以下定理提供保证。

定理 1 在公式集的全部真值赋值列中除去使公式集不相容的赋值列，由此得到的剩余赋值集与可能世界对应的公式集的赋值集的简化集等价。

证明可分两步进行：

(1) 任一剩余赋值集中的列有相对应的可能世界；

(2) 任一可能世界有相对应的列在剩余赋值集中。

(证明过程略)。

设在简单树推理模型中，推理网络形成一棵树，树的节点表示不可重复出现的原子公式，树的边表示原子公式之间的逻辑蕴涵关系（即公式集中的公式）。一般的简单树推理有如下的形式（假定树的节点都表示原子命题，每一条边表示一个逻辑蕴涵公式，蕴涵关系一律由上到下，如 $A\rightarrow B$，$B\rightarrow F$，$E\rightarrow H$）：

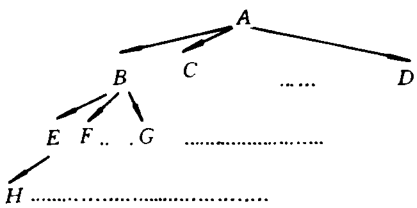


图 1 一般的简单树推理的表示

在这种简单推理树中，公式之间的相关性可能局部化地考虑，即只考虑纵向相邻推理链所表示的公式两两之间的真值取值限制。先考虑两个公式之间的相关性，设两公式为

$P\rightarrow Q$ $Q\rightarrow R$

很明显，两公式不能取真值（0，0），即只有三种赋值是有效的：

$P\rightarrow Q$	0	1	1
$Q\rightarrow R$	1	0	1

对应的可能世界为：

P	11	01	0001
Q	00	11	0011
R	01	00	0111

下面给出一般的分析。

在一个有向推理树结构中，若树的节点都代表没有重复的原子命题公式，而树的有向边都表示原子命题之间的逻辑蕴涵关系，则可以推算出组成树的全部节点所对应的原子命题的可能世界中，可形成哪些对树中所表示的逻辑公式集有效的真值赋值函数。首先考虑有向推理树中的一条推理链，即树中的节点序列 d_1，d_2，…，d_n，且树中存在有向边 $\langle d_1, d_2\rangle$，$\langle d_2, d_3\rangle$，…，$\langle d_{n-1}, d_n\rangle$，称这种链式结构为有向推理链结构。

定义 1 在有向推理链公式结构中，若链中具有 k 条边，则用 $u_0^{k,i}$ 表示第 i（i=1，2，

…，k+1，从链头向链尾依次标记）个节点所对应的原子命题取真值 0 的条件下，公式集的有效真值赋值函数个数；用 $u_1^{k,i}$ 表示第 i（i=1，2，…，k+1）个节点所对应的原子命题取真值 1 的条件下，公式集的有效真值赋值函数个数。

引理 1 在有向推理链公式结构中，若〈P，Q〉，〈Q，R〉是链中的两条相邻边，P→Q 和 Q→R 是所对应的逻辑蕴涵公式，则对任意的有效真值赋值函数 F：A→｛0，1｝，其中 A 为包含链中所有公式的集合，有赋值约束项：

$F(P\to Q)=0 \quad \Rightarrow \quad F(Q\to R)=1$ 成立。

证 令原子公式集的真值指派函数为 $S:\mathrm{atomic}(A)\to\{0,1\}$.

由 $F(P\to Q)=0$，可推出 $S(Q)=0$，

又若 $F(Q\to R)=0$，可推出 $S(Q)=1$.

矛盾！证毕。

引理 2 在有向推理链公式结构中，有如下关系式成立：

$u_0^{k,k+1}=u_1^{k-1,k}$； $\qquad u_1^{k,k+1}=u_0^{k-1,k}+u_1^{k-1,k}$

证 对第一式，由引理 1 的结论，只有 $u_1^{k-1,k}$ 个真值赋值可产生不矛盾的 $u_0^{k,k+1}$ 个有效真值赋值。对第二式，$u_0^{k-1,k}$ 和 $u_1^{k-1,k}$ 都可产生不矛盾的 $u_1^{k,k+1}$ 个真值赋值。证毕。

引理 3 在有向推理链公式结构中，若链中具有 k 条边的公式集的有效真值赋值函数个数为 M，且其中有 $u_0^{k,k+1}=L$，则 $M-L$ 为具有 $k-1$ 条边的公式集的有效真值赋值函数个数。

证 由于在一个推理链中相邻边首尾相接的节点所对应的原子命题分别作为前一公式的蕴涵后件和后一公式的蕴涵前件，使得相邻边所对应的逻辑公式的取值具有相互约束关系；而不相邻的边所对应的公式之间没有直接的相互约束关系，因此只需要考虑链中相邻边之间的约束关系即可。这种约束关系集中反映在同时作为两公式后件和前件的原子命题的真值取值必须与两公式的真值一致。由引理 2 可推出如下关系：

$M=u_0^{k,k+1}+u_1^{k,k+1}$； $\qquad L=u_0^{k,k+1}$；

$$\begin{aligned} M-L &=u_1^{k,k+1} \\ &=u_0^{k-1,k}+u_1^{k-1,k} \end{aligned}$$

上式右边是具有 $k-1$ 条边的公式集的有效真值赋值函数个数。证毕。

定理 2 具有 N 条边的有向推理链所构成的逻辑公式集的有效真值赋值函数的个数为 $C(N)=\mathrm{Fibonacci}(N+2)$，其中 Fibonacci 函数定义如下：

$\mathrm{Fibonacci}(0)=0$；$\mathrm{Fibonacci}(1)=1$，

$\mathrm{Fibonacci}(i)=\mathrm{Fibonacci}(i-2)+\mathrm{Fibonacci}(i-1), \quad (i>1)$.

证 当 $N=1$ 时，有 $C(N)=C(1)=\mathrm{Fibonacci}(3)=2$. 公式成立。

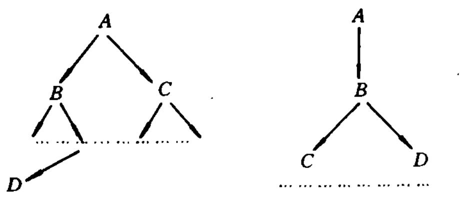
设当 $N\leqslant k$ 时公式成立，即有 $C(k)=\mathrm{Fibonacci}(k+2)$，则

当 $N=k+1$ 时，根据引理 2，3 有：

$$\begin{aligned} C(k+1)&=u_0^{k+1,k+2}+u_1^{k+1,k+2} \\ &=u_0^{k+1,k+2}+C(k)=u_1^{k,k+1}+C(k) \\ &=u_0^{k-1,k}+u_1^{k-1,k}+C(k)=C(k-1)+C(k) \\ &=\mathrm{Fibonacci}(k+1)+\mathrm{Fibonacci}(k+2)=\mathrm{Fibonacci}(k+3). \end{aligned}$$ 证毕。

根据定理 2 的结论，可以分析得出一棵有向推理树所表示的逻辑公式集的有效真值赋值函数的个数，仅以二叉树为例说明算法设计的思路。

对于图 2 中的(a)图，由于根为分支点，利用上面已给出的分析结果，容易证明整个树的有效赋值函数的个数为左右两棵子树的有效赋值个数的乘积，因为左右两棵树的真值赋值函数只有在根节点处相关，即只有与根节点所表示的原子命题相关的两个逻辑公式的真值赋值才相关，显然它们的取值不存在相互约束。因而有如下关系式成立　C(cross)＝C(left _ cross)×C(right _ cross)



(a) 根为分支点　　(b) 根为链头

图 2　有向推理树所表示的逻辑公式集的真值赋值关系

其中，cross 表示分支点以下的子树，left _ cross 表示分支点左边的子树，right _ cross 表示分支点右边的子树。而 C(cross)、C(left _ cross)和 C(right _ cross)分别表示这些子树所代表的逻辑公式集的有效真值赋值函数个数。对于(b)图，根为链头而非分支，但在它的下方仍可能存在分支节点而展开成一棵子树。同样地运用上面已给出的分析结果，可推出这样的一棵子树所表示的逻辑公式集的有效真值赋值函数个数与头链(即子树根到第一个分支点之间的有向链)所表示的公式集的赋值函数个数、子分支(即第一个分支点下的子树)和子分支链(即子分支下的左右子树)的有效真值赋值函数个数有关。有如下关系式成立

C(tree)＝C(line-1)C(cross)＋C(line-2)C(left-1)C(right-1)，

其中，C(tree 函数)表示整个子树所代表的逻辑公式集的有效真值赋值函数个数，C(line-1)表示头链中最后一个公式的真值赋值规定为 1 时头链所代表的公式集的有效真值赋值函数个数，C(cross)表示第一个分支节点以下子树所代表的公式集的有效真值赋值函数个数，C(line-2)表示链头中最后一个公式的真值赋值规定为 0 时头链所代表的公式集的有效真值赋值函数个数，C(left-1)表示从第一个分支节点以下的左子树中去掉第一个边后的子树所代表的公式集的有效真值赋值函数个数，C(right-1)表示从第一个分支节点以下的右子树中去掉第一个边后的子树所代表的公式集的有效真值赋值函数个数。

2　有效赋值列数的计算方法

按照以上分析结果，可以设计计算一棵有向推理树所表示的逻辑公式集的有效真值赋值函数个数的递归算法如下

```
procedure(Tree)
    integer result,
    begin
        take the root of the Tree,
        if root is a crossing node then
            take the left subtree as left _ tree and
```

```
            take the right subtree as right _ tree,
            result= procedure(left _ tree)×procedure(right _ tree),
            return result.
    else
        search for the first crossing node,
        if there is a crossing node then
            take the line before the first crossing node as L,
            take the subtree under the first crossing node as S,
            take the left _ subtree of S without first edge as left _ S,
            take the right _ subtree of S whitout first edge as right _ S,
            result=CF (L,1)procedure(S)+
                   CF(L,2)procedure(left _ S)procedure(right _ S),
            return result.
        else
            result=CF(Tree)
            return result.
end
```

其中,CF 函数的定义与所给参数有关。当 T 表示一个有向推理链且它的长度为 n(T)时有

CF(T)=C(n(T)),

CF(T,1)=C(n(T)−1),

CF(T,2)C(n(T)−2),　　C( )均为定理2中定义的函数。

直观理解,CF(T)表示有向链代表的公式集的有效赋值函数个数,CF(T,1)表示当有向链的最后一条边所对应的公式赋值规定为1时,有向链代表的公式集的有效赋值函数个数,CF(T,2)表示当有向链的最后一条边所对应的公式赋值规定为0时,有向链代表的公式集的有效赋值函数个数。

3 结论

根据上面推导的算法,对有向推理树模型给出的公式集,可以不用产生它的所有赋值列,而仅根据推理树的构造,计算出它的有效赋值集中的赋值数。需要进一步研究的问题是,算法如何向更复杂的网络形式推广,如何设计有效的算法按线性规划模型的要求以一定顺序产生有效赋值列,并保持各有效赋值列与可能世界的对应关系。

参 考 文 献

1 Nilsson N J. Probabilistic Logic. AI. 1986, 28. 71～87

2 Kavvadias D, Papadimitriou C H. A Linear Programming Approach to Reasoning about Probabilities. Annals of Mathematics and AI. 1990, (1): 189

(责任编辑　张　静)