国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第19卷第6期　1997年12月　Vol. 19 No. 6

关于塔式网络矢量量化中格点的标号*

李弼程　郑勇　沙基昌　周铁强　罗建书
（国防科技大学系统工程与数学系　长沙　410073）

摘　要　在格型矢量量化中，用格点作为量化矢量，构成码书。为了存储或传输量化输出，必须对格点进行标号。我们在数据压缩课题研究中，对塔式网格矢量量化中格点的标号进行了探索，给出了常用的几种网络诸如 Z^L、D_L、E_8、Λ_{16}等格点的标号算法。

关键词　网格，塔式网格矢量量化，标号
分类号　TN911.22

On the Index of Lattice Points in Pyramidal Lattice Vector Quantization

LiBicheng　ZhengYong　ShaJichang　ZhouTieQiang　LuoJianshu
(Department of Systems Engineering and Mathematics. NUDT, Changsha, 410073)

Abstract　In lattice vector quantization, the codebook is made up of lattice points as qantization vectors. It is essential to give an index to a lattice point, so that the output of quantizer can be stored or transmitted. In our study of data compression, an entire research is given to the problem of the index of lattice points in pyramidal lattice vector quantization, and index algorithms are presented to index the lattce points of some usually-used lattices, such as Z^L, D_L, E_8 and Λ_{16}so on.

Key words　lattice, pyramidal lattice vector quantization, index

在矢量量化中，通常采用LBG算法[1]去设计码书的量化器，此均属于随机型的量化器。采用LBG算法去设计码书的主要优点是，设计时不需要知道信源的概率分布特性。它的缺点是量化器的复杂度随维数呈指数关系增加。格型矢量量化器[2][3][4]则不同，它在多维信号空间中，构造一种有规律的网络，称这种网络为格或网格，网络的点称为格点

* 九五国防预研基金与国防科大试验技术基金项目资助
卫星应用技术研究资助

(Lattice Point)，并以格点作为量化矢量，把信号空间划分成若干胞腔。由于网络是有规律的，所以格点和胞腔也是有规律的。这样，构造码书就比较容易，不需要存储和传输码书，具有通用性，并且有量化快速算法[5][6] 此外可以使用较大的维数和大的码书。

在格型矢量量化中，对格点进行标号是关键的一步。这里我们讨论塔式矢量量化中格点的标号。文献［7］中提出了一种矢量标号方法，即用一个矢量对格点进行标号。这种方法容易造成比特浪费。文献［2］给出一种关于整数网格 Z^L（$L\geqslant 1$）格点的标量标号算法，可是其解码算法有错误；如果格点中有负数分量，则解码以后就可能得不到原来的格点。我们在数据压缩课题研究中，对塔式矢量量化中格点的标号进行了探索，更正了文［2］中的算法，并且在此基础上提出了常用的几种网格，如 Z^L、D_L、E_8、Λ_{16}等格点的标号算法。

1 根格的定义

假设 R^m 是 m 维欧氏空间，R^L 是它的 L 维子空间（$m\geqslant L$），在此空间中有 L 个 $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\cdots,\bar{a}_L$ 线性独立的矢量。L 维根格 Λ 定义为

$$\Lambda=\{\boldsymbol{y}\mid \boldsymbol{y}=u_1\boldsymbol{a}_1+u_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+u_L\boldsymbol{a}_L,u_i\in Z\}\tag{1}$$

其中 Z 为整数集，以 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_L$ 为行向量的 $L\times L$ 的矩阵称为 Λ 的生成矩阵，记为 G。

几种常用的网格的定义[3]：

$$Z^L=\{(x_1,\cdots,x_L):x_i\in Z\}(L\geqslant 1)\tag{2}$$

$$D_L=\left\{(x_1,\cdots,x_L)\in Z^L:\sum_{i=1}^{L}x_i\in 2Z\right\}(L\geqslant 3)\tag{3}$$

$$E_8=\left\{(x_1,\cdots,x_8):x_i\in Z\text{ 或 }x_i\in Z+\frac{1}{2},\sum_{i=1}^{8}x_i\in 2Z\right\}\tag{4}$$

实际上，E_8 还可表示为

$$E_8=D_8\cup\left(D_8+\frac{\mathbf{1}}{2}\right)\tag{5}$$

其中，**1** 表示所有的分量都是 1 的 8 维矢量，$2Z$ 表示偶数集。

Barnes－Wall 网格 $$\Lambda_{16}=\bigcup_{i=0}^{31}\left(D_{16}+\frac{1}{2}r_i\right)\tag{6.1}$$

也有的写成形式 $$\Lambda_{16}=\bigcup_{i=0}^{31}(2D_{16}+r_i)\tag{6.2}$$

其中 r_i（$0\leqslant i\leqslant 31$）对应长度为 16 的一阶 Reed－Muller 码的码字。

对于维数为 L 的网格 Λ，定义半径（能量）为 K 的塔：

$$S(L,K)=\left\{Y=(y_1,y_2,\cdots,y_L)\in\Lambda/\sum_{i=1}^{L}|y_i|=K\right\}\tag{7}$$

记 N（L，K）为 S（L，K）中格点的个数，关于 N（L，K）的求法见文［7］［8］。

如果网格 Λ 为维数为 L 的整数网格 Z^L，则 N（L，K）有如下递推公式[2]

$N(L,0)=1\quad(L\geqslant 0),\qquad N(0,K)=0\quad(K\geqslant 1)$ (8. 1)

$N(L,K)=N(L-1,K)+N(L-1,K-1)+N(L,K-1)\ (L\geqslant 1,K\geqslant 1)$ (8. 2)

2　快速量化算法[5][6]

设 Λ 为维数为 L 的网格，对于 L 维输入矢量 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_L)$，记 $Q_\Lambda(X)$ 为 Λ 中距离 X 最近的格点，即 $Y=Q_\Lambda(X)$ 为输入矢量 X 在 Λ 中的量化输出。在格型矢量量化中，距离的度量通常采用 l^2 模 $\|\ \|_2$。

2.1　输入矢量 X 在 L 维整数网格 Z^L 中的最近格点

对任意实数 x，设 $f(x)$ 为距离 x 最近的整数，则对任一矢量 $X=(x_1, x_2, \cdots, X_L)\in R^L$

$$Y = Q_{Z^L}(X) = (f(x_1),\cdots,f(x_L)) \tag{9}$$

事实上，X 在 Z^L 中最近的格点 $Q_{Z^L}(X)$ 的各分量是 X 的各分量都取最靠近的整数。

2.2　输入矢量 X 在 L 维网格 D_L 中的最近格点

对任意实数 x，设 $f(x)$ 为距离 x 最近的整数，$f(X)=(f(x_1), \cdots, f(x_L))$。定义：

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x \geqslant 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \tag{10}$$

$$w(x) = f(x) + \operatorname{sign}(x - f(x)) \tag{11}$$

误差矢量 $\delta = X - f(X) = (\delta_1,\cdots,\delta_L)$　(12)

输入矢量 X 在网格 D_L 中的量化分如下三步：

(1) 求出 X 在 L 维整数网格 Z^L 中的最近格点 $f(X) = (f(x_1),\cdots,f(x_L))$；

(2) 计算 $g(X) = (f(x_1),\cdots,w(x_i),\cdots,f(x_L))$。这里 x_i 是 X 中的分量，下标 i 对应于误差矢量 $\delta = X - f(X)$ 中绝对值最大的分量 δ_i，对于这个下标 i，用 $w(x_i)$ 代替 $f(x_i)$，从而形成 $g(X)$；

(3) $f(X)$ 与 $g(X)$ 中有且仅有一个其分量之和为偶数的矢量。这个矢量就是 X 在网格 D_L 中的量化输出矢量。

2.3　输入矢量 X 在 E_8、Λ_{16} 中的最近格点

设 $Q_\Lambda(X)$ 为 Λ 中距离 X 最近的格点，则 $Y=Q_\Lambda(X-r)+r$ 是陪集 $r+\Lambda$ 中距离 X 最近的点。对于陪集的并 $U_i(r_i+\Lambda)$，则 $Y_i=Q_\Lambda(X-r_i)+r_i$ $(i=1, 2, \cdots)$ 中距离 X 最近的点为 $U_i(r_i+\Lambda)$ 中距离 X 最近的点。

输入矢量 X 在 E_8 中的量化分如下三步：

(1) 求出 D_8 中距离 X 最近的格点 Y_0；(2) 求出 $D_8+\frac{1}{2}$ 中距离 X 最近的向量 Y_1；(3) 分别比较 X 与 Y_0、Y_1 的距离，距离最小的为输出矢量。

输入矢量 X 在 $\Lambda_{16}=\bigcup_{i=0}^{31}\left(D_{16}+\frac{1}{2}r_i\right)$ 中的量化分如下两步：

(1) 求出 $\frac{1}{2}r_i+D_{16}$ 中距离 X 最近的向量 Y_i，$(i=0, 1, \cdots, 31)$；(2) 分别比较 X 与 $Y_0, Y_1, \cdots, Y_{31}$ 的距离，距离最小的为输出矢量。

3　格点的标号

在具体的量化中，首先要确定使用的网格类型，如 D_4、E_8、Λ_{16} 等，设维数为 L：其

次根据量化比特率确定码书的大小，也就是确定能量 K，使得

$$\mathrm{SP}(L,K)=\left\{Y=(y_1,\cdots,y_L)\in\Lambda/\sum_{i=1}^{L}|y_i|\leq K\right\} \tag{13}$$

或

$$\mathrm{SP}(L,K)=\left\{Y=(y_1,\cdots,y_L)\in\Lambda/\sum_{i=1}^{L}|y_i|^2\leq K^2\right\} \tag{14}$$

构成所需的码书。对于服从拉普拉斯分布的信源，采用塔式网格矢量量化，即采用（13）定义的码书；对于服从高斯分布的信源，采用球形网格矢量量化，即采用（14）定义的码书。

3. 1 格点的矢量标号

文献［7］给出了一种塔式网格矢量量化中对格点进行标号的方法：给定网格 Λ，如 D_4、E_8、Λ_{16}等，维数为 L，ρ 为 Λ 的 l^2 填充半径（packing radius），生成矩阵为 G，其逆矩阵为 G^{-1}，Q_Λ 如第 2 节定义。对于 $Y\in\mathrm{SP}$（L，K），用 Index（Y）＝（k_1，…，k_n）来标记 Y，其中，$0\leqslant k_1$，…，$k_n\leqslant k-1$，$k=\left[\dfrac{K}{\rho}\right]$。具体关系如下：

$$\mathrm{Index}(Y)=(k_1,\cdots,k_n)=\mathrm{mod}_k\{YG^{-1}\}$$

$$Y \Longleftrightarrow \mathrm{Index}(Y) \tag{15}$$

$$Y=\mathrm{Index}(Y)G-kQ_\Lambda\left(\frac{\mathrm{Index}(Y)G}{k}\right)$$

对于格点 Y，需要存储和传输 Index（Y）＝（k_1，…，k_n）。这种方法容易造成比特浪费，即 $\left\{Y\in\Lambda/Y=IG-kQ_\Lambda\left(\dfrac{IG}{k}\right),I=(k_1,\cdots,k_n),0\leqslant k_1,\cdots,k_n\leqslant k-1\right\}\supset\mathrm{SP}(L,K)$

3. 2 格点的标量标号

文献［2］给出一种关于整数网格 Z^L（$L\geqslant1$）格点的标量标号算法，可是，其解码算法有错误，如果格点中有负数分量，则解码以后就可能得不到原来的格点。我们在数据压缩课题研究中，对塔式网格矢量量化中格点的标号进行了探索，更正了［2］中的算法，并且提出了常用的几种网格如 Z^L、D_L、E_8、Λ_{16}等格点的标号算法。我们按能量进行分类，分别对各能量塔上的格点进行标号。对于 $S(L,K)=\{Y=(y_1,y_2,\cdots,y_L)\in\Lambda/\sum_{i=1}^{L}|y_i|=K\}$ 上的格点，我们用 0，1，…，N（L，K）－1 中某个数 b 来标号，其中 N（L，K）为 S（L，K）中格点的个数。此时，对于格点 $Y\in S$（L，K），需要存储和传输的有两个数：标号 b 与能量 K，记为（b，K）。

3. 2. 1 整数网格 Z^L（$L\geqslant1$）的标号算法

（1）编码算法：设 $Y=$（y_1，$y_2\cdots$，y_L）$\in Z^L$，令 $K=\sum_{i=1}^{L}|y_i|$（能量）。

a）令$b=0$，$i=1$，$k=K$，$l=L$。根据递推公式（8. 1）（8. 2）计算 N（m，n）（$m\leqslant L$，$n\leqslant K$）。定义函数 sgn（x）$=\begin{cases}1 & X>0\\0 & X=0\\-1 & X<0\end{cases}$

b）如果 $y_i=0$，则 $b=b+0$；

如果$|y_i|=1$，则 $b=b+N(l-1,k)+\left[\dfrac{1-\operatorname{sgn}(y_i)}{2}\right]N(l-1,k-1)$；

如果 $|y_i|>1$，则

$$b=b+N(l-1,k)+2\sum_{j=1}^{|y_i|-1}N(l-1,k-j)$$
$$+\left[\frac{1-\operatorname{sgn}(y_i)}{2}\right]N(l-1,k-|y_i|)$$

c）$k-|y_i|\to k$，$l-1\to l$，$i+1\to i$。

如果 $k=0$，则停止，b 为 Y 的标号；否则 Go to (b)。

(2) 解码算法：给定能量 K 与标号 b，要求格点 Y，即要求格点 $Y=(y_1, y_2, \cdots, y_L)\in Z^L$，其能量为 K，标号为 $b\in\{0, 1, \cdots, N(L, K)-1\}$。

a）令 $Y=(y_1, y_2, \cdots, y_L)=(0, 0, \cdots, 0)$，$xb=0$，$i=1$，$k=K$，$l=L$。根据递推公式（8. 1）（8. 2）计算 $N(m, n)$（$m\leqslant L \quad n\leqslant K$）。

b）如果 $b=xb$，则 $y_i=0$；Go to (f).

c）如果 $b<xb+N(l-1, k)$，则 $y_i=0$，Go to (e).

否则，$xb=xb+N(l-1, k)$；令 $j=1$。

d）如果 $b<xb+2N(l-1, k-j)$，则

如果 $xb\leqslant b<xb+N(l-1, k-j)$，则 $y_i=j$。

如果 $b\geqslant xb+N(l-1, k-j)$，则 $y_i=-j$，$xb=xb+N(l-1, k-j)$**。

否则 $xb=xb+2N(l-1, k-j)$，$j=j+1$；Go to (d)。

e）$k-|y_i|\to k$，$l-1\to l$，$i+1\to i$。如果 $k>0$，则 Go to (a)。

f）如果 $k>0$，则 $y_L=k-|y_i|$。$Y=(y_1, y_2, \cdots, y_L)$ 为所求的格点。

注：** 式 $xb=xb+N(l-1, k-j)$ 是作者添上去的，原算法有误。

3. 2. 2 网格 D_L、E_8、Λ_{16}的标号算法

容易验证：在偶数能量塔上，网格 Z^L 中的格点与 D_L 中的格点是等同的。从而，可用网格 Z^L 的格点标号算法对网格 D_L 的格点进行标号，例如，对 D_4、D_8、D_{16}的格点标号就可以分别利用 Z^4、Z^8、Z^{16}的格点标号算法。

对于格点 $Y\in E_8=D_8\cup\left(D_8+\frac{1}{2}\right)$ 的标号，先用 1 比特来标识 $Y\in D_8$ 或 $Y\in D_8+\frac{1}{2}$，设标识符为 yb。如果 $Y\in D_8$，则 $yb=0$，用 D_8 的标号算法对 Y 进行标号，其标号为 b_0，能量为 K_0；如果 $Y\in D_8+\frac{1}{2}$，则 $yb=1$，同样用 D_8 的标号算法对 $Y-\frac{1}{2}\in D_8$ 进行标号，其标号为 b_1，能量为 K_1. 这样，需要存储和传输（0，b_0，K_0）或（1，b_1，K_1）。在接收端，如果标识符 $yb=0$，则根据（b_0，K_0），用 D_8 的标号算法解出 Y；如果标识符 $yb=1$，则根据（b_1，K_1），用 D_8 的标号算法解出 $Y-\frac{1}{2}$，从而得到 Y.

对于 $Y\in\Lambda_{16}=\bigcup_{i=0}^{31}\left(D_{16}+\frac{1}{2}r_i\right)$ 的标号是类似的，不过，此时需要 5 比特来标识。

4 结 论

本文给出了塔式网格矢量量化中常用的几种网格诸如 Z^L，D_L，E_8，Λ_{16}等格点的标号算法。为塔式网格矢量量化在数据压缩中的应用提供了关键性的技术，并且易于实现。

例如 Y_0＝（1，－1，2，1，0，－2，3，0）$\in D_8$，Y_1＝（1. 5，－0. 5，2. 5，1. 5，0. 5，－1. 5，3. 5，0. 5）$\in E_8$. Y_0 与 Y_1 的矢量标号分别为 Index（Y_0）＝（12，13，10，12，13，13，11，0）（k＝14），Index（Y_1）＝（10，10，2，1，0，9，3，1）（k＝11）；Y_0 与 Y_1 的标量标号分别为 Index（Y_0）＝（99875，10），Index（Y_1）＝（1，99875，10）。无论矢量标号还是标量标号，能分别用 Index（Y_0），Index（Y_1）解码得到 Y_0 与 Y_1. 如果用［2］中的解码算法，用 Index（Y_0）＝（99875，10）解码得到 $\hat{Y}_0$＝（1，－1，9，0，0，0，0，0）$\neq Y_0$.，

参 考 文 献

1 Linde Buzo Y A，Gray R M. An algorithm for vector quantizer design. IEEE Trans. Commun，Jan 1980 COM-28，(1)：84～95

2 Fischer T R. A pyramid vector quantizer. IEEE Trans. Inform. Theory，1986，IT-32：585～583

3 Conway J H. Slone N J A. Sphere Packing，Lattices and Groups. Springer Verlag，1988

4 胡征 杨有为. 矢量量化原理与应用. 西安电子科技大学出版社，1988

5 Conway J H. Slone N J A. Fast Quantizing and Decoding Algorithms for Lattice Quantizers and Codes. IEEE Trans. Inform. Theory，March 1982，IT-28，(2)：227～232

6 Conway J H. Slone N J A. A Fast Encoding Method for Lattice Codes and Quantizers. IEEE Trans. Inform. Theory，1983，IT-29，(6)：820～824

7 Michel Barlaud，Patrick Sole. Pyramidal Lattice Vector Quantization for Multiscale Image Coding. IEEE Trans Image Proc，July 1994，3，(4)：367～380

8 Barlaud M. Wavelets in Image Communication（ADVANCES IN IMAGE COMMUNICATION 5），ISBN：0-444-89281-8，1994

（责任编辑　潘　生）