

多刚体系统计算机代数动力学建模研究*

黄新生 黄圳圭 朱小谦

(国防科技大学自动控制系 长沙 410073)

摘要 本文研究了复杂多刚体系统的 Lagrangian 建模方法, 以 Mathematica 数学软件为基础, 完成了多刚体动力学系统的计算机建模、推导与仿真。

关键词 多刚体系统, 计算机代数, 符号推演

分类号 O 313. 3

A Study of Computer Algebra Dynamics Modeling for Multi-Rigid-Body System

Huang Xinsheng Huang Zhengui Zhu Xiaoqian

(Department of Automatic Control, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract The paper studies the Lagrangian method for complex Multi-Rigid-Body system. On the basis of Mathematica system, the computer modeling, reduction and simulation of the Multi-Rigid-Body dynamics system are completed.

Key words Multi-Rigid-Body system, Computer algebra, Sign-reducing

空间站大型伸展机构, 例如太阳帆板、大型天线、机械臂等, 在其展开与收拢的运动过程中, 动力学特性非常复杂, 很难通过手工推导建立系统的动力学模型进行仿真。计算机代数具有强大的符号推演功能, 是完成复杂系统模型推导的有效工具。本文主要研究了多刚体系统动力学理论建模与计算机建模问题, 并以 Mathematica 系统为支撑, 编制了多刚体系统动力学符号推演建模与仿真软件。该软件具有一定的通用性, 可以适应不同体数、不同联接方式, 以及不同树结构形式的多刚体系统动力学分析的需要。

1 多刚体系统动力学的理论建模

1.1 系统拓扑结构

实际应用系统中多为有根树型结构, 由各体 (记为 B_j) 通过铰链 (记为 O_j) 联接而成。系统的拓扑结构可由 n 维向量 T 描述:

$$T(j) = j \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n, n \text{ 为体数})$$

如图 1 树型系统:

其拓扑结构如表 1。

j	1	2	3	4	5
$T(j) = j$	0	1	1	1	2

1.2 系统的自由度、广义坐标、方向余弦

多刚体系统的自由度 N 为铰链的转动自由度 N_{Rj} 和拉伸自由度 N_{Tj} 之和。

* 1997 年 11 月 3 日修订

第一作者: 黄新生, 男, 1955 年生, 副教授

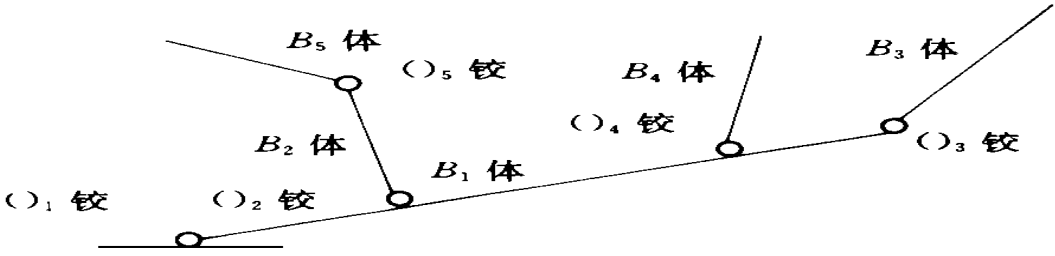


图 1

$$N = \sum_{j=1}^n (N_{Rj} + N_{Tj})$$

设 \$O_j\$ 铰为理想球铰链 (\$N_{Rj} = 3, N_{Tj} = 3\$), 其平动矢量 \$\mathbf{Z}_j = \sum_{s=1}^3 k_{js} \cdot \mathbf{Z}_{js}\$ 表示在空间滑移。\$B_j\$ 体坐标系相对于 \$B_j\$ 体坐标系存在 Euler 角 \$(\theta_1, \theta_2, \theta_3)\$, 则 \$B_j\$ 体广义坐标和方向余弦定义如下:

- (1) 广义坐标为 \$Z_{j1}, Z_{j2}, Z_{j3}, \theta_1, \theta_2, \theta_3\$;
- (2) \$B_j\$ 体相对于 \$B_j\$ 体的方向余弦阵为 \$G_j\$, \$B_j\$ 体相对于惯性坐标系的方向余弦阵为 \$A_j\$,

$$G_j = T_z(\theta_1) \quad T_x(\theta_3) \quad T_z(\theta_2)$$

$$A_j = G^0 \quad G^1 \dots G^j \quad G^i = A_i \quad G_i$$

其中

$$T_x(*) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(*) & \sin(*) \\ 0 & -\sin(*) & \cos(*) \end{bmatrix}; \quad T_z(*) = \begin{bmatrix} \cos(*) & \sin(*) & 0 \\ -\sin(*) & \cos(*) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.3 \$B_j\$ 体角速度

- (1) \$B_j\$ 体的相对角速度 \$\Omega_j\$ 为 (以 \$N_{Rj} = 3\$ 为例):

$$[\dot{\theta}_2 \sin\theta_3 \quad \sin\theta_1 + \dot{\theta}_3 \cos\theta_1 \quad \dot{\theta}_2 \sin\theta_3 \cos\theta_1 - \dot{\theta}_3 \sin\theta_1 \quad \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \cos\theta_3]^T$$

- (2) \$B_j\$ 体的绝对角速度 \$\omega_j\$

$$\omega_j = G_j^T \omega + \Omega_j$$

1.4 \$B_j\$ 体的质心速度

- (1) \$B_j\$ 体质心矢径 \$Y_j\$, 如图 2: \$B_j\$ 体质心 \$C_j\$ 对参考点 \$O\$ 的矢径 \$Y_j\$,

$$Y_j = G_j^T Y_{Lj} + \mathbf{Z}_j + G_j^T d_{ij} + d_{ij}$$

- (2) \$B_j\$ 体质心 \$C_j\$ 相对于惯性坐标系的速度 \$v_j\$

$$v_j = G_j^T v_{Lj} + \dot{\mathbf{Z}}_j + G_j^T (\omega \times d_{ij}) + \omega \times d_{ij}$$

1.5 广义力 \$Q\$

设作用在 \$B_j\$ 体的主动力向质心 \$C_j\$ 简化为主矢量 \$F_{Ej}\$, 主矩 \$L_{Ej}\$, 作用在铰 \$O_j\$ 的非理想约束的约束力为 \$F_{Rj}\$, 约束力矩为 \$L_{Rj}\$, 则系统广义力为:

$$Q_{z_{is}} = \sum_{j=1}^n F_{Ej}^T \frac{\partial Y_j}{\partial z_{is}} + F_{Rj}^T k_{is} \quad s = 1, 2, 3 \dots N_{Tj}$$

$$Q_{\theta_s} = \sum_{j=1}^n \left[F_{Ej}^T \frac{\partial Y_j}{\partial \theta_s} + L_{Ej}^T \frac{\partial \omega_j}{\partial \theta_s} \right] + L_{Rj}^T P_{is} \quad s = 1, 2, 3 \dots N_{Rj}$$

1.6 动能 \$T\$

$$T = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} (m_j v_j^T v_j + \omega_j^T I_j \omega_j)$$

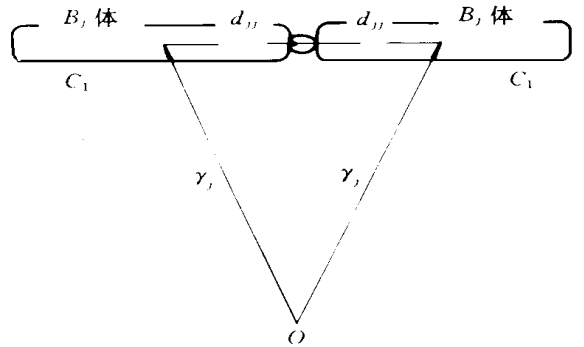


图 2

1.7 有根树型系统的 Lagrangian 方程

当多刚体系统为有根系统时, \$B_0\$ 体的运动规律由 Lagrangian 方程决定:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q \quad (j = 1, 2, 3 \dots N, N \text{ 为系统自由度})$$

记广义坐标 \$q = [z_{11}, z_{12} \dots z_{nN_{Tn}}, \theta_1, \theta_{12} \dots \theta_{nN_{kn}}]^T\$

2 多刚体系统动力学推演软件

2.1 Lagrangian 公式推演算法的改进

直拉采用 Lagrangian 方法对多刚体系统动力学方程进行推导, 其思想是比较简单的, 但直接推导无法完成较复杂的多刚体系统动力学建模。因为随着系统体数和自由度的增加, 计算量和输出表达式的长度是成几何级数增长的, 这对计算机的内存和处理速度提出了很苛刻的要求, 必须对 Lagrange 算法进行改进。

对如下 Lagrangian 方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q \quad (j = 1, 2, 3 \dots N, N \text{ 为系统自由度})$$

计算偏导数:

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^n (m_i \frac{\partial v_i^T}{\partial q_j} + \frac{\partial \omega^T}{\partial q_j} I_i \omega)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) = \sum_{k=1}^N A_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^N B_{jk} \dot{q}_k$$

其中

$$A_{jk} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial v_i^T}{\partial q_j} \frac{\partial v_i}{\partial q_k} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega^T}{\partial q_j} I_i \frac{\partial \omega}{\partial q_k}$$

$$B_{jk} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial^2 v_i^T}{\partial q_j \partial q_k} v_i + \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial v_i^T}{\partial q_j} \frac{\partial v_i}{\partial q_k} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \omega^T}{\partial q_j \partial q_k} I_i \omega + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega^T}{\partial q_j} I_i \frac{\partial \omega}{\partial q_k}$$

取上式中偏导数 \$\frac{\partial v_i}{\partial q_j}, \frac{\partial v_i}{\partial q_k}, \frac{\partial \omega}{\partial q_j}, \frac{\partial \omega}{\partial q_k}\$,

\$\frac{\partial^2 v_i}{\partial q_j \partial q_k}, \frac{\partial^2 \omega}{\partial q_j \partial q_k}\$ 为中间变量, 作为符号进行运

算, 就其所代表的内容进行推导, 并在输出程序中赋值, 这样就大大缩短了输出表达式的长度。

2.2 公式推演与仿真框图

3 算例

平面五体系统 (如图 1)

3.1 输入参数

体数 \$n = 5\$; 拓扑结构表见表

1。

体较矢量表:

$$d_{11} = [2l \ 0 \ 0]^T; \quad d_{12} = [-l \ 0 \ 0]^T; \quad d_{13} = [2l \ 0 \ 0]^T; \quad d_{25} = [l \ 0 \ 0]^T \dots$$

$$\text{系统自由度 } N_{Rj} = 1; \quad N_{Tj} = 0; \quad N = \sum_{j=1}^n (N_{Rj} + N_{Tj}) = 5$$

$$\text{系统质量参数: } m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = \frac{1}{2} m_1$$

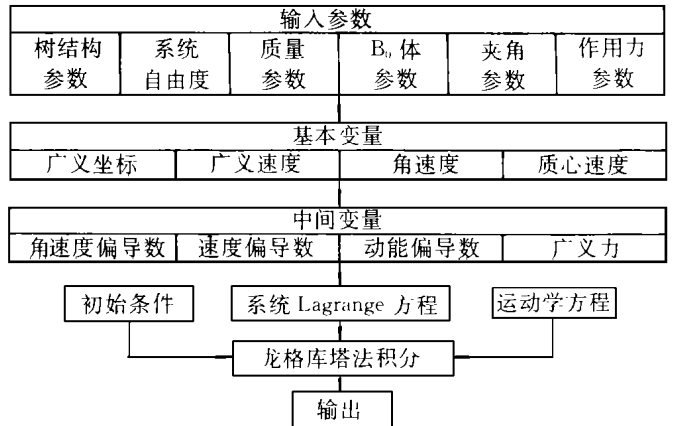


图 3

$$I_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3}ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3}ml^2 \end{bmatrix}; \quad I_2 = I_3 = I_4 = I_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}ml^2 \end{bmatrix}$$

B_0 体运动参数: $\gamma_0 = \nu_0 = 0$

作用力参数: 设系统各体间连接为理想光滑铰链, 在重力作用下运动。

$$F_{E1} = [-2mgs\sin\theta_{11} \quad -2mg\cos\theta_{11} \quad 0];$$

$$F_{E2} = [-mgs\sin(\theta_{11} + \theta_{21}) \quad -mg\cos(\theta_{11} + \theta_{21}) \quad 0];$$

$$L_{Ej} = F_{Rj} = L_{Rj} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, 5)$$

3.2 仿真结果验证

分别用 Lagrangian 方法和 R. W 方法仿真结果进行比较, 其结果一致。

T	$\overset{\circ}{q}_1$	$\overset{\circ}{q}_2$	$\overset{\circ}{q}_3$	$\overset{\circ}{q}_4$	$\overset{\circ}{q}_5$
0.0	0.1000E+02	0.1000E+02	0.1000E+02	0.1000E+02	0.1000E+02
	0.1000E+01	0.1000E+01	0.1000E+01	0.1000E+01	0.1000E+01
0.1	0.1000E+02	0.1001E+02	0.1003E+02	0.1002E+02	0.1003E+02
	.9986E+00	0.7234E+00	0.4946E+01	0.3470E+01	0.4398E+01
0.2	0.9980E+01	0.1001E+02	0.1010E+02	0.1007E+02	0.1009E+02
	.2997E+01	0.4461E+00	0.8891E+01	0.5939E+01	0.7797E+01
0.3	0.9940E+01	0.1002E+02	0.1021E+02	0.1014E+02	0.1018E+02
	.4995E+01	0.1675E+00	0.1283E+02	0.8406E+01	0.1120E+02
0.4	0.9880E+01	0.1002E+02	0.1036E+02	0.1024E+02	0.1031E+02
	.6992E+01	.1132E+00	0.1677E+02	0.1087E+02	0.1460E+02
0.5	0.9800E+01	0.1002E+02	0.1054E+02	0.1036E+02	0.1047E+02
	.8987E+01	.3969E+00	0.2069E+02	0.1332E+02	0.1800E+02
0.6	0.9700E+01	0.1001E+02	0.1077E+02	0.1050E+02	0.1067E+02
	.1098E+02	.6843E+00	0.2461E+02	0.1577E+02	0.2140E+02
0.7	0.9581E+01	0.1000E+02	0.1104E+02	0.1067E+02	0.1090E+02
	.1297E+02	.9761E+00	0.2851E+02	0.1820E+02	0.2480E+02
0.8	0.9441E+01	0.9990E+01	0.1134E+02	0.1087E+02	0.1117E+02
	.1496E+02	.1273E+01	0.3239E+02	0.2062E+02	0.2819E+02
0.9	0.9281E+01	0.9976E+01	0.1168E+02	0.1109E+02	0.1147E+02
	.1695E+02	.1576E+01	0.3625E+02	0.2302E+02	0.3158E+02

参考文献

- 1 裘宗燕. Mathematica 数学软件系统的应用及其程序设计. 北京大学出版社
- 2 黄圳圭, 赵志建. 大型航天器动力学与控制. 长沙: 国防科技大学出版社
- 3 Kane T R, Likins P W. Spacecraft Dynamics. McGraw-Hill Company