国防科技大学学报
第20卷第5期 JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY Vol. 20 No. 5 1998

复杂系统研制阶段可靠性增长的评估模型*

党晓玲 秦石桥 武小悦 沙基昌

(国防科技大学系统工程与数学系 长沙 410073)

摘 要 针对复杂系统可靠性增长管理中采取延缓修正的故障修正方式，提出了一种系统阶段可靠性增长的评估模型。在阶段 k 应用 Bayes 定理，得出系统可靠性的点估计、置信区间估计，并对评估结果进行任务周期修正；通过 λ_k 的先验分布利用前面 1，…，k－1 阶段试验的信息，在相邻的两个阶段，引入增长因子 $0<\eta_k<1$ 以表现可靠性的增长。最后给出一个应用实例。

关键词 可靠性增长 任务周期 Bayes 方法

分类号 N94

A Reliability Growth Model for Complex System in Development Testing Program

Dang Xiaoling Qin Shipiao Wu Xiaoyue Sha Jichang

(Department of System Engineering and Mathematics, NUDT, Changsha, 410073)

Abstract In this paper, we present a reliability growth model to describe the changes of failure rate at several stages of the development testing program. At stage k, Bayes method is used to get the failure rate of system, then the result is updated according to the duty cycle. The prior distribution of λ_k is developed to use the information of test 1to k－1. A growth factor η_k is introduced at each stage to show the reliability growth. A numerical example illustrates the use of the model.

Key words reliability growth, duty circle, bayesian methodology

实践表明，对复杂系统进行可靠性增长试验，是提高其可靠性的重要途径。不过，单纯的增长试验，往往需要耗费大量的资源，而且时间有限，不能满足其可靠性要求。解决的办法是从系统研制阶段的初期开始进行可靠性增长管理，尽可能的利用研制过程中各项试验的资源和信息，把可靠性试验和非可靠性试验结合起来，经济地、高效地促使产品达到预定的可靠性目标。

可靠性增长管理的主要内容除了制定增长目标、增长计划外，很重要的是需对可靠性增长的过程实施跟踪和定量控制。这就需要有合适的可靠性增长模型，利用故障数据来评估和预测系统的可靠性。研制阶段的可靠性增长随着研制试验的不同，可分为几个阶段。对于复杂系统，如 FMS，往往承担多种任务，各子系统在不同的任务中具有不同的任务剖面，工作时间有时差别很大。因而，不能以相同的评估标准来评估不同任务周期时系统的可靠性。本文针对复杂系统可靠性增长的特点建立了可靠性增长的评估模型，能够充分利用各阶段试验信息，可以给出各阶段结束时系统可靠性的点估计、置信区间估计，并将它们修正到相同的标准下。

1 模型的基本假定和描述

(1) 假定系统的研制试验共分为 n 个阶段，系统在阶段 k 内的可靠性恒定，且寿命服从参数为 λ_k 的指数分布，λ_k 为系统失效率：

$$f_k(t\ \lambda_k) = \lambda_k \exp(-\lambda_k t), \lambda_k, t > 0, k = 1, 2, \cdots, n,$$

* 1998 年 4 月 10 日收稿
国家九·五预研项目
第一作者：党晓玲，女，1974 年生，博士生

(2) 假定第 k ($k=1, 2, \cdots, n$) 阶段的试验结果为 (n_k, t_k)，其中，t_k 为该阶段的累积试验时间，n_k 为累积故障次数。试验截尾可以是故障截尾、时间截尾或其它方式，累积试验时间的计算可参照 文献 [1]。

(3) 假设各阶段结束时的修正措施有效，新结构系统的可靠性比前一阶段系统的可靠性高，从阶段 i 到阶段 $i+1$ 系统的失效率降低 $\Delta\lambda_i$。即：

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n,$$

$$\lambda_i - \lambda_{i+1} = \Delta\lambda_i, i = 1, \cdots, n。$$

(4) 系统共分为 m 个子系统，各子系统失效率的预计值已知，为 Λ_1，Λ_2，…，Λ_m。

(5) 选取失效率 λ_k 的先验分布如下：阶段 $k=1$ 时，对系统的了解很少，可以选择无信息的先验分布；当 $k\geq1$ 时，选择伽玛分布作为先验分布。

$$\begin{cases} \pi(\lambda_1) = 1 \\ \pi(\lambda_k) = \beta_k^{\alpha_k}\lambda_k^{\alpha_k-1}e^{-\beta_k\lambda_k}/\Gamma(\alpha_k) \end{cases} \tag{1}$$

2 单阶段可靠性增长的 Bayes 分析

首先对第 k 阶段的试验过程进行 Bayes 分析[2]。

阶段 k 系统的失效率为恒定值 λ_k，系统的寿命服从指数分布。因而，在阶段 k 的故障次数遵从泊松分布[3]：

$$h((n_k, t_k) \mid \lambda_k) = \frac{(\lambda_k t_k)^{n_k} e^{-\lambda_k t_k}}{n_k!} \tag{2}$$

我们的问题是怎样根据该阶段试验信息和其它相关信息得到失效率 λ_k 的验后分布。从而得到系统的可靠性点估计、置信区间估计。

在阶段 k 利用 Bayes 定理[2]，若 λ_k 的先验分布为 $\pi(\lambda_k)$ 可得 λ_k 验后分布为

$$g(\lambda_k \mid (n_k, t_k)) = \frac{\pi(\lambda_k)h((n_k, t_k) \mid \lambda_k)}{\int_0^\infty \pi(\lambda_k)h((n_k, t_k) \mid \lambda_k)\,\mathrm{d}\lambda_k}$$

将 (1)，(2) 代入并化简可得

$$g(\lambda_k \mid (n_k, t_k)) = D_k\lambda_k^{\alpha_k+n_k-1}e^{-(\beta_k+t_k)\lambda_k} \tag{3}$$

其中，D_k 为与 λ_k 无关的常数。先验分布为均匀分布时可看作是 $\alpha_k=0$、$\beta_k=0$。

可见，后验分布是参数为 (α_k+n_k, β_k+t_k) 的伽玛分布。具有均值和方差为

$$\mathrm{E}(\lambda_k \mid (n_k, t_k)) = \frac{\alpha_k+n_k}{\beta_k+t_k}, \mathrm{Var}(\lambda_k \mid (n_k, t_k)) = \frac{\alpha_k+n_k}{(\beta_k+t_k)^2}$$

在平方损失下 λ_k 的点估计为

$$\hat{\lambda}_k = \frac{\alpha_k+n_k}{\beta_k+t_k}$$

可以证明[2]，λ_k 的置信度为 θ 的置信上限 $\bar{\lambda}_{k,\theta}$ 为

$$\bar{\lambda}_{k,\theta} = \chi^2_{\theta, 2(\alpha_k+n_k)}/2(\beta_k+t_k)$$

其中，$\chi^2_{\theta, 2(\alpha_k+n_k)}$ 为具有自由度 $2(\alpha_k+n_k)$ 的 χ^2 分布的 θ 分位点。

3 评估结果的修正

系统的可靠性要求通常是与它的典型任务周期相对应提出的[4]，这一典型任务周期是根据系统的主要功能及其子系统的利用率综合得到的，即典型任务周期是系统运行要求为 T 小时，各子系统分别需运行 T_1，T_2，…，T_m 小时。由于在系统的研制试验阶段中，具体的任务周期不可能完全符合典型的任务周期，在阶段 k，系统运行 t_k 小时，各子系统分布运行 t_{ki} ($i=1 \cdots m$) 小时。因而，必须有合适的修正方法，使各阶段的可靠性增长评估结果统一在相同的任务周期下。

为此，我们引入任务修正系数 ω_k（$k=1, \cdots, n$），它定义为系统在典型任务周期下的预计失效率 Λ 与各阶段具体任务周期下预计失效率 λ_{ky} 的比值，

$$\omega_k = \frac{\Lambda}{\lambda_{ky}}, k = 1 \cdots n \tag{4}$$

只考虑基本可靠性，即各子系统串联，则系统预计的可靠性

$$\begin{aligned} R_y &= \exp(-\Lambda T) \\ &= \exp(-\Lambda_1 T_1)\exp(-\Lambda_2 T_2)\cdots\exp(-\Lambda_m T_m) \\ &= \exp(-\Lambda_1 T_1 - \Lambda_2 T_2 - \cdots - \Lambda_m T_m) \end{aligned}$$

因而，系统典型任务周期下的预计失效率 Λ 为

$$\Lambda = \frac{\Lambda_1 T_1 + \Lambda_2 T_2 + \cdots + \Lambda_m T_m}{T}$$

同理可得

$$\lambda_{ky} = \frac{\Lambda_1 t_{k1} + \Lambda_2 t_{k2} + \cdots + \Lambda_m t_{km}}{t_k}$$

$$\omega_k = \frac{\Lambda}{\lambda_{ky}} = \frac{t_k}{T} \frac{\Lambda_1 T_1 + \Lambda_2 T_2 + \cdots + \Lambda_m T_m}{\Lambda_1 t_{k1} + \Lambda_2 t_{k2} + \cdots + \Lambda_m t_{km}}$$

将单阶段Bayes可靠性评估结果 $\hat{\lambda}_k$ 与任务修正系数 ω_k 相乘，得到修正后的评估结果：

$$\hat{\lambda}_k = \hat{\lambda}_k \times \omega_k$$

从而，可以根据修正结果对可靠性的增长进行评估。

4 先验分布的确定

系统可靠性增长试验每一阶段的故障数据是有限的，评价第 k 阶段系统的可靠性，需要利用所有 $1, \cdots, k-1$ 阶段的试验信息。我们通过先验分布将信息从一个阶段向下一个阶段传递，在阶段1，可以根据专家知识和其它先验信息选取伽玛先验分布参数，无先验信息时可选均匀分布。

从阶段 k 到阶段 $k+1$，由于纠正措施的引入，系统的可靠性从一个阶段到另一个阶段是增长的。考虑到第 $k+1$ 阶段先验分布的均值 μ_{k+1} 和方差 σ_{k+1}^2 与参数具有如下关系：

$$\alpha_{k+1} = \mu_{k+1}^2 / \sigma_{k+1}^2$$

$$\beta_{k+1} = \mu_{k+1} / \sigma_{k+1}^2$$

我们给出第 k 阶段后验分布与第 $k+1$ 阶段先验分布的关系如下：

(1) $k+1$ 阶段先验分布均值为 k 阶段后验均值与一个增长因子 $0<\eta_k<1$ 的函数，并进行任务周期的修正：

$$\mu_{k+1} = \mathrm{E}(\lambda_k \ (n_k, t_k)) \quad (1-\eta_k) \quad \omega_k / \omega_{k+1}$$

(2) $k+1$ 阶段先验分布方差与 k 阶段后验方差相等：

$$\sigma_{k+1}^2 = \mathrm{Var}(\lambda_k \ (n_k, t_k))$$

若增长因子 $0<\eta_k<1$，在实际应用中可以保证可靠性的增长，它的大小可以反映修正措施的有效性，修正措施越有效，η_k 值应越大。实际计算时，可取

$$\eta_k = \frac{n_{kB}}{n_k} d_k$$

n_k、n_{kB} 分别为第 k 阶段故障次数和做了修正的故障总数。d_k 为纠正有效性系数，它是指故障被纠正后，其故障率被减少的部分与纠正前的故障率之比[1]。

由此可见，在计算第 $k+1$ 阶段先验分布时需利用第 k 阶段的信息，而第 k 阶段先验分布又需利用第 $k-1$ 阶段的信息，依次类推可得，第 $k+1$ 阶段的先验分布的获得也利用了第1阶段的信息。

5 示例分析

某系统共包括7个子系统，具有多种功能，其可靠性要求是在典型任务周期下，失效率以90%的

概率小于 $\lambda^* = 0.02$ (即平均故障间隔时间 MTBF 为 50h (小时))，对其进行三个阶段的可靠性增长试验，试验结果为：$(n_1, t_1) = (5, 40)$，$(n_2, t_2) = (5, 113)$，$(n_3, t_3) = (1, 128)$，时间的单位是 h (小时)，典型任务周期和三阶段试验中系统和子系统的运行情况如表 1。用本文的模型对其进行可靠性增长分析如下：

(1) 阶段 1。根据结果修正方法，计算该任务周期下的预计失效率为 $S_{\lambda_{1y}} = 0.00585$，任务修正系数 $\omega = 1.263$。

表 1 系统预计失效率及任务周期

	预计先效率	典型任务周期	阶段一任务周期	阶段二任务周期	阶段三任务周期
1	0.003	15	11	0	95
2	0.0025	18	38	50	124
3	0.0005	20	35	113	110
4	0.0025	10	16	42	72
5	0.0003	5	9	27	35
6	0.0003	20	40	113	124
7	0.0002	20	40	113	124
系统	0.0075	20	40	113	124

假设在阶段 1 对系统的可靠性情况没有了解，可选取无信息的先验分布 $\pi(\lambda_1) \propto 1$，由公式 (3) 得出 λ_1 的后验分布为 $g(\lambda_1 \mid (5, 40))$，点估计 $\hat{\lambda}_1 = 0.125$，λ_1 的 90% 的置信上限为：

$$\bar{\lambda}_{1,0.9} = \chi^2_{0.9,2\times5}/2 \times 40$$
$$= 15.98718/2 \times 40 = 0.1998$$

从而修正值为：

$$\tilde{\lambda}_1 = 0.1579$$
$$\tilde{\lambda}_{1,0.9} = 0.2469$$

由于，$\tilde{\lambda}_{1,0.9} > \lambda^*$，所以没有达到可靠性增长的要求。

求出 λ_1 的后验均值和方差为：$E(\lambda_1 \mid (5, 40)) = 0.125$，$Var(\lambda_1 \mid (5, 40)) = 0.00312$。

(2) 阶段 2。$\lambda_{2y} = 0.00375$，任务修正系数 $\omega_2 = 2$。

根据阶段 1 结束后故障的纠正情况，对可靠性的增长进行分析，确定增长因子 $\eta_1 = 0.7$，取伽玛先验分布，先验均值和方差为：

$$\mu_2 = 0.125 \times (1-0.7) \times 1.263/2 = 0.02368 \quad \sigma_2^2 = 0.00312$$

先验分布参数为：

$$\alpha_2 = 0.02368^2/0.00312 = 0.18, \beta_2 = 0.02368/0.00312 = 75$$

该阶段试验的结果是 113h (小时) 试验故障 5 次，得到后验分布为 $g(\lambda_2 \mid (5.18, 188))$，点估计为 $\hat{\lambda}_2 = 0.0276$，90% 的置信上限 $\bar{\lambda}_{2,0.9} = 0.0438$，查表插值得 $\chi^2_{0.9,2\times5.18} = 16.45$。

计算修正值为：$\tilde{\lambda}_2 = 0.055$，$\tilde{\lambda}_{2,0.9} = 0.0876$，由于 $\tilde{\lambda}_{2,0.9} > \lambda^*$，仍不能满足可靠性要求。

求出 λ_2 的后验均值和方差为：

$$E(\lambda_2 \mid (5.18, 188)) = 0.0276, Var(\lambda_2 \mid (5.19, 188)) = 1.466 \times 10^{-4}$$

(3) 阶段 3。$\lambda_{3y} = 0.00804$，任务修正系数 $\omega_3 = 0.933$。

确定增长因子 η_3 为 0.5。

该阶段伽玛先验分布参数 $\alpha_3 = 0.283$，$\beta_3 = 43.9$，试验结果为 128h (小时) 故障 1 次，得到后验

分布为 g（λ_3 （1．283，171．9)），点估计为 $\hat{\lambda}_3 = 0.0075$，90%的置信上限 $\lambda_{3,0.9} = 0.0207$。

计算修正值为：$\tilde{\lambda}_3 = 0.0069$，$\tilde{\lambda}_{3,0.9} = 0.0193$。由于 $\tilde{\lambda}_{3,0.9} < \lambda^*$，已达到了失效率以90%的概率小于 $\lambda^* = 0.02$ 的要求。

参考文献

1 周源泉，翁朝曦．可靠性增长．北京：科学出版社，1992，120～127

2 张金槐，唐雪梅．BAYES 方法．长沙：国防科技大学出版社，1993，178～219.

3 Raffaela Calabria．A Reliability-Growth Model in a Bayes-Decision Framework．IEEE Tran．On Reliability．1996，R45（3）：505～510

4 James H Chin Arne Lobben Reliability Growth Through an Integrated Test Approach-A case History Proc·Ann·Reliability and Maintainability Symp，1985：432～438